



# PVK – Biomechanik II

**Jack Kendall**  
*kendallj@ethz.ch*  
Juni 2020

# Allgemeine Informationen

- **Website:** <http://n.ethz.ch/student/kendallj/>
- **Podcast:** Polybox – link findet ihr auf der Website
- **Fragen:** stehe 15.06. bis 28.06. zur Verfügung – nutzt die Gelegenheit!  
«Unmuten», in Chat schreiben oder per email
  
- **Prüfung:** Moodle, 90 min, ca. 30 Fragen

# Agenda

## 1. Tag

- Gauss'sche Fehlerfortpflanzung
- Kinematik
- Koordinaten / Matrizen

## 2. Tag

- Kinetik I: Newton, Energie

## 3. Tag

- Kinetik II: Impulserhaltung, Lagrange, Inverse Dynamics

## 4. Tag

- Euler, Leistung
- Harmonischer Oszillator
- Muskel(optimierung)

# Grundlagen

Vektoren, Vektoroperationen, Trigonometrie, Rechte Hand Regel

# Lösen von Aufgaben in Biomechanik II

- Skizze und Text gut studieren und lesen
- Gegebene und **gesuchte Größen** aufschreiben
- Freischnitt und Skizze gross zeichnen
- Alles in SI Einheiten umrechnen  
→ m, m/s, kg, J, J/s, N, Nm, rad/s,...

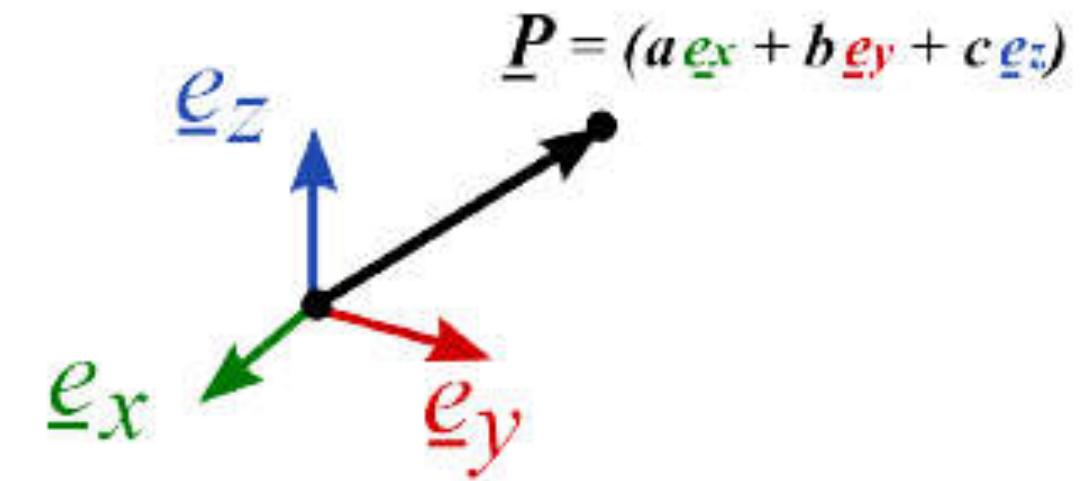
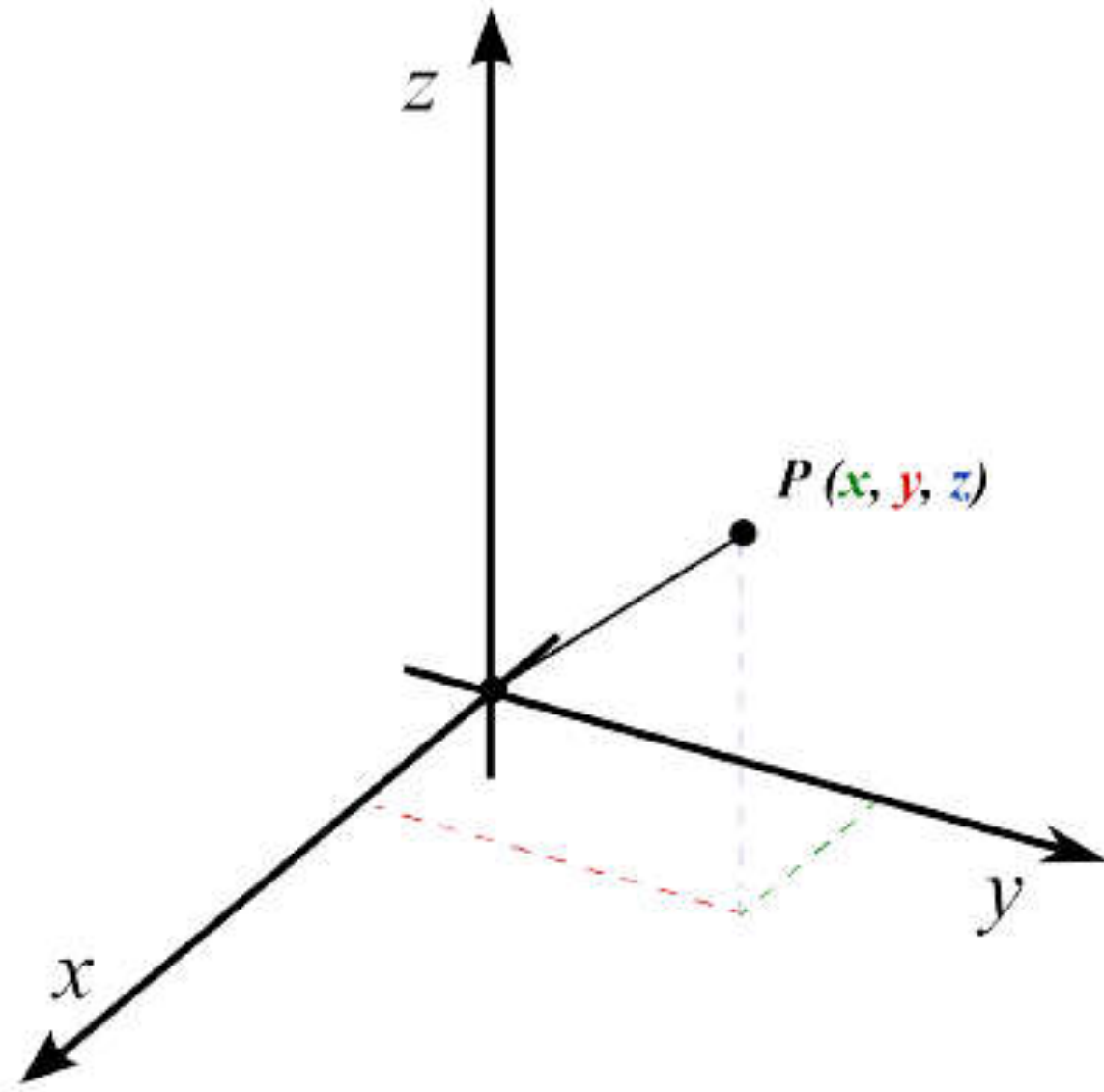
Derived Quantity		S.I. Unit	
Name	Symbol	Name	Symbol
Displacement	d	metre	m
Area	A	metre squared	m <sup>2</sup>
Volume	V	metre cubed	m <sup>3</sup>
Speed	s	metre/second	m/s
Velocity	v	metre/second	m/s
Acceleration	a	metre/second <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>
Force	F	newton	N = kg m/s <sup>2</sup>
Energy	E	joule	J = N m
Density	$\rho$	kilogram/metre cubed	kg/m <sup>3</sup>
Moment	T	newton metre	N m
Power	P	watt	W = N m/s
Work	W	joule	J = N m
Momentum	$\rho$	kilogram metre/second	kg m/s = N s
Pressure	P	pascal	Pa = N/m <sup>2</sup>

# Vektoren

Die kartesische Basis besitzt pro Dimension einen Einheitsvektor, d.h. für 3-D gilt

$$\underline{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Einheitsvektor ist normiert, bedeutet dass Betrag / Länge  $|\underline{e}_x| = 1$  ist.



$$\vec{v} = \underline{v} = a\underline{e}_x + b\underline{e}_y + c\underline{e}_z = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (2)$$

wobei der Einheitsvektor  $\underline{e}_x$  in X-Richtung zeigt und mit einer Länge  $a$  multipliziert wird. Analog mit  $\underline{e}_y$  &  $b$  und  $\underline{e}_z$  &  $c$ .

# Vektoren

## 1.2 Vektoren aus Koordinatensystem ablesen

In Aufgaben müssen oft Distanzen oder Vektoren zwischen zwei Punkten bestimmt werden (Bsp. Kap. 4.1). Dabei gilt immer Spitze minus Anfang:

$$\underline{\mathbf{AB}} \hat{=} \mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{OP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \hat{=} \mathbf{P} \quad (3)$$

wobei  $\underline{\mathbf{AB}}$  die Verbindungsgerade von  $\mathbf{A}$  nach  $\mathbf{B}$  und  $\underline{\mathbf{OP}}$  vom Ursprung  $\mathbf{O}$  zu Punkt  $\mathbf{P}$  ist.

## 1.3 Betrag und Normierung

Die Länge vom Vektor ist gleich dessen Betrag:

$$v = |\underline{\mathbf{v}}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (4)$$

Der normierte Vektor besitzt die Länge 1, behält jedoch die ursprüngliche Richtung:

$$\underline{\mathbf{e}}_v = \frac{\underline{\mathbf{v}}}{|\underline{\mathbf{v}}|} \quad |\underline{\mathbf{e}}_v| = 1 \quad (5)$$

# Vektoroperationen

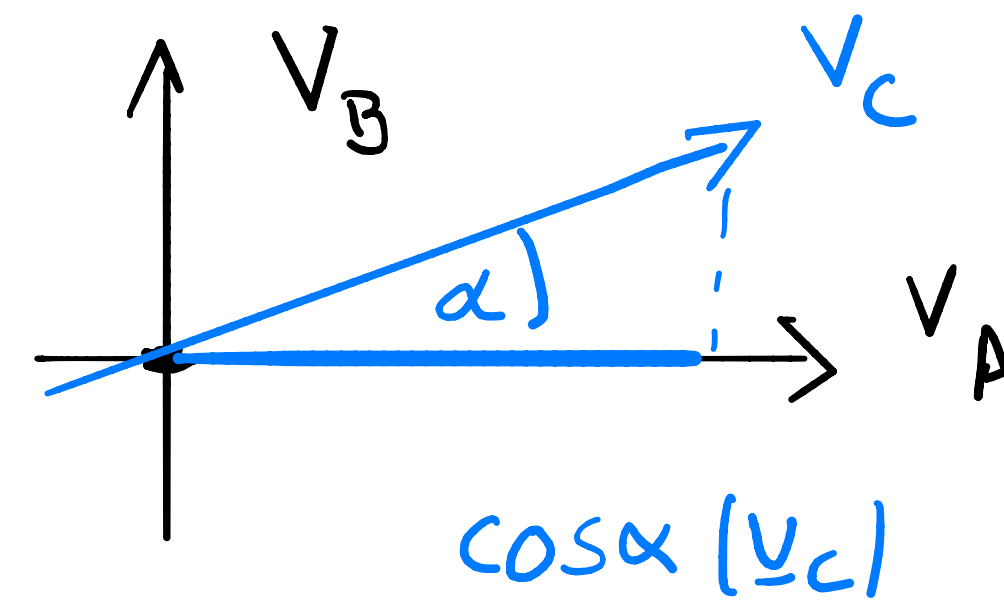
$$\underline{v}_a \times \underline{v}_b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \underline{c}$$

Sind  $\underline{v}_a$  &  $\underline{v}_b$  parallel oder gleich, dann ist  $\underline{v}_a \times \underline{v}_b = \underline{0}$

$$\underline{v}_a \cdot \underline{v}_b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = c$$

Sind  $\underline{v}_a$  &  $\underline{v}_b$  orthogonal (rechtwinklig/senkrecht) zueinander, dann ist  $\underline{v}_a \cdot \underline{v}_b = 0$

$$\lambda \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix}$$



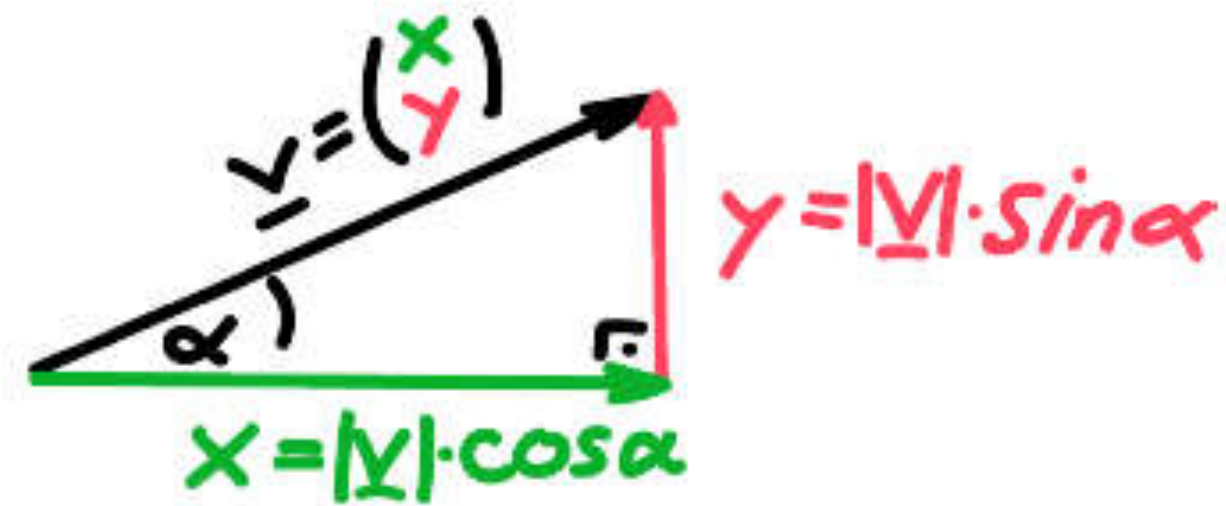
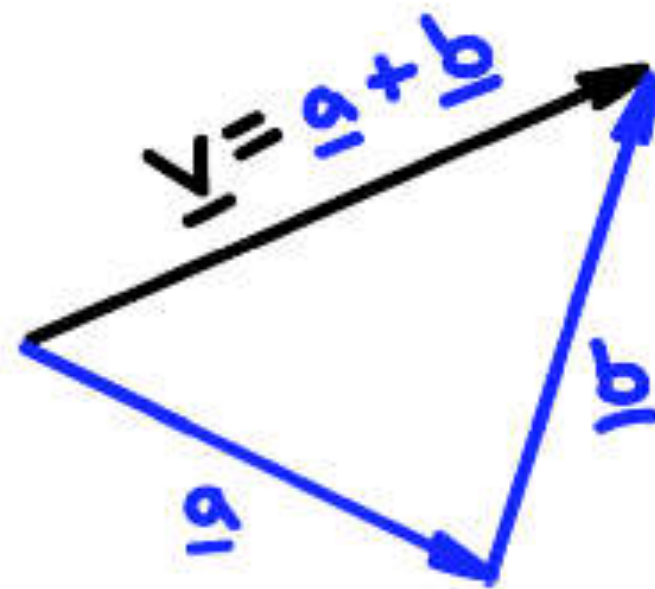
$$\underline{v}_A \perp \underline{v}_B, \quad \underline{v}_A \cdot \underline{v}_B = 0$$



# Vektoroperationen

$$\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Vektoren kann man sowohl zusammenzählen, als auch in einzelne Komponente zerlegen. Später wird diese Zerlegung für die Berechnung von Geschwindigkeiten, Momente und Leistungen sehr nützlich sein:



# Matrixoperationen

## 2.5 Matrixprodukt

Grundregel: Zeile Mal Spalte

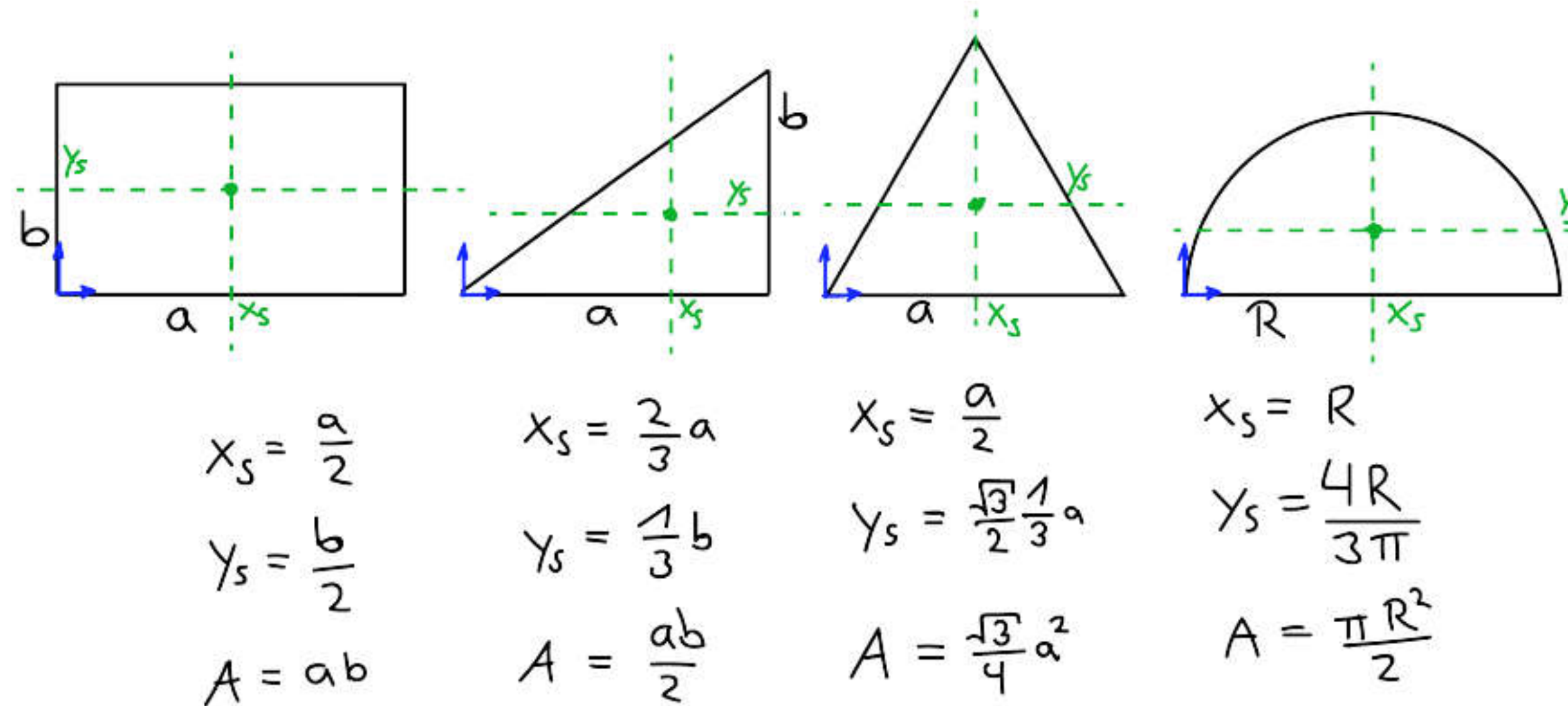
$\in \mathbb{R}^{k \times n}$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$2 \times 2 \quad 2 \times 2$

$$A \in \mathbb{R}^{k \times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

# Schwerpunkt von Flächen



Bei Schwerpunktproblemen kann man die meisten Flächen in kleinere, bekannte Flächen aufteilen.  
Grundsätzlich sollte man die Symmetrie einer Figur zu nutze machen.

Um dann den Schwerpunkt der Gesamtfläche zu erhalten, muss man summieren und zwar:

$$x_{s,ges} = \frac{\sum_i x_{s,i} A_i}{A_{ges}}$$

$$y_{s,ges} = \frac{\sum_i y_{s,i} A_i}{A_{ges}}$$

# Schwerpunkt von Flächen (Formal)

Formal:

$\hat{=}$  "Mittelwert"

**2D:**

$$x_s = \frac{\int_K x dA}{\int_K dA},$$

$$y_s = \frac{\int_K y dA}{\int_K dA} \quad (14)$$

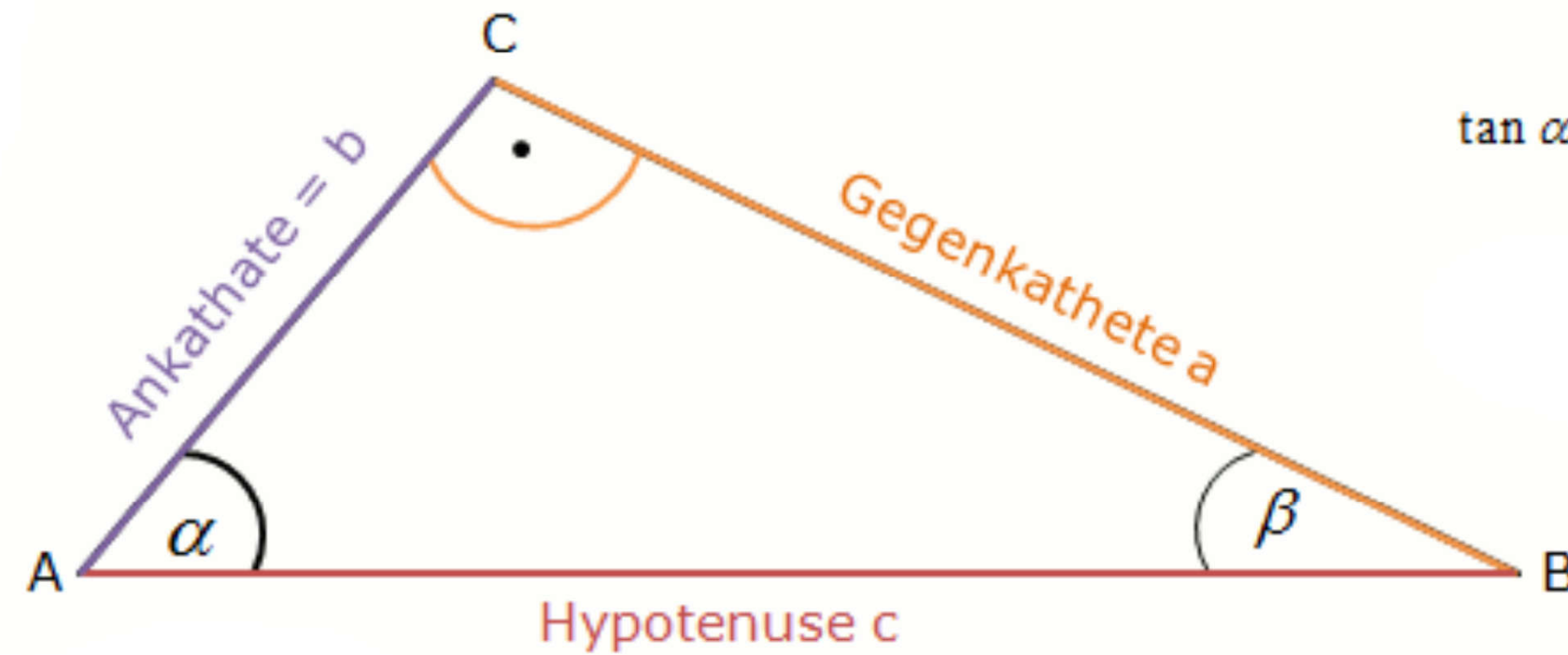
	kartesisch	zylindrisch	sphärisch
Flächenelement $dA$	$dx dy$	$r \cdot dr d\phi$	$\sin \theta \cdot d\theta d\psi$

Um dann den Schwerpunkt der Gesamtfläche zu erhalten, muss man summieren und zwar:

$$x_{s,ges} = \frac{\sum_i x_{s,i} A_i}{A_{ges}}$$

$$y_{s,ges} = \frac{\sum_i y_{s,i} A_i}{A_{ges}}$$

# Trigonometrie



$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} = \sin \beta$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \frac{a}{b} = \cot \beta$$

$\alpha$	$0 / 0^\circ$	$\frac{\pi}{6} / 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} / 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} / 60^\circ$	$\frac{\pi}{2} / 90^\circ$	$\pi / 180^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$	0
$\cot \alpha$	$\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\infty$

# Hilfsgleichungen

## Hilfsgleichungen

Quadratische Lösungsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sinus- und Kosinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

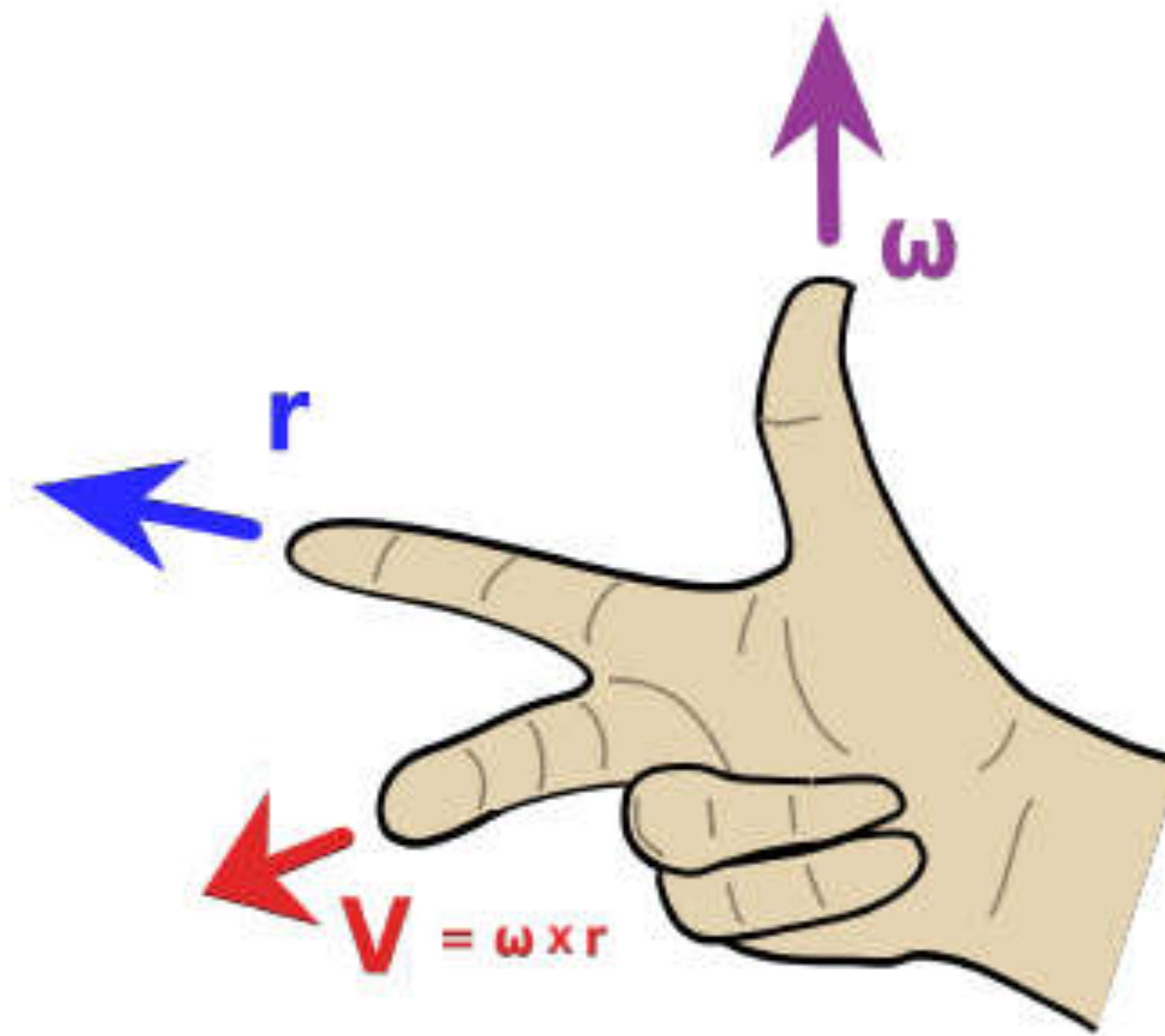
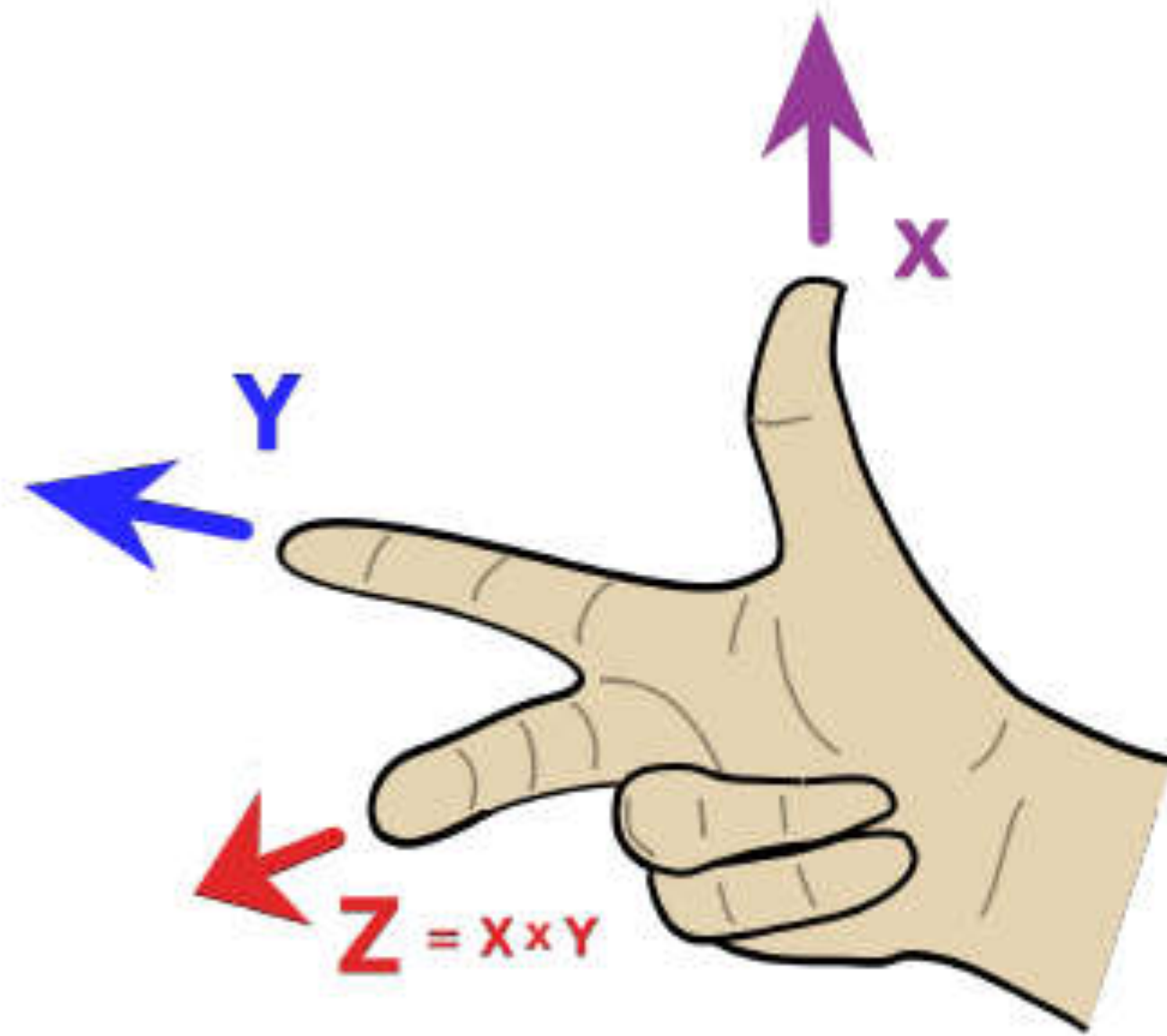
Additionstheoreme

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

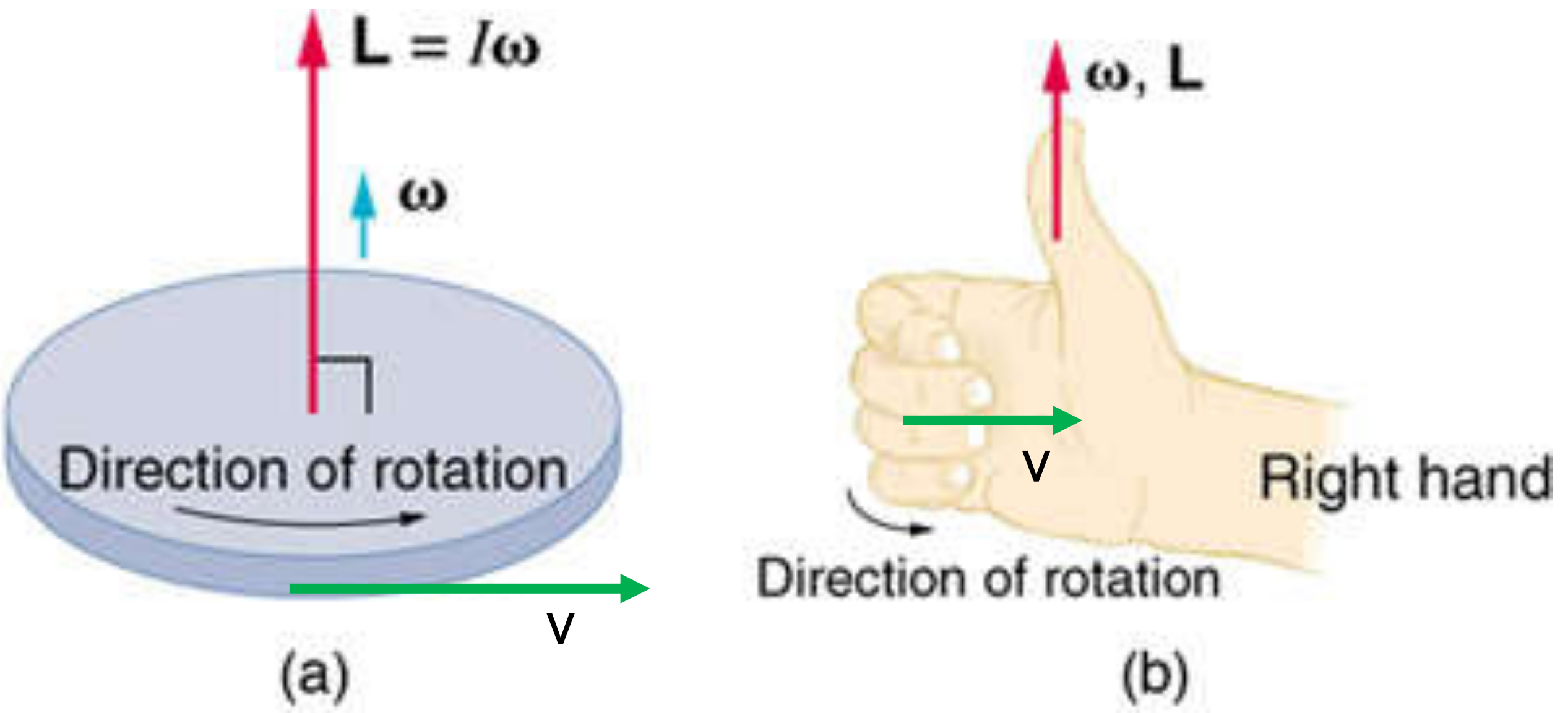
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

# Rechte Hand Regel (RHR)



$$\text{LHR: } \underline{x} \times \underline{y} = -\underline{z}$$

# Rechte Hand Regel (RHR)





# Newtonsche Gesetze (vereinfacht)

1. Ein kräftefreier Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit.

Trägheitsprinzip

2. Kraft gleich Masse mal Beschleunigung.  $F = ma$

↳ Impulssatz

$$\underline{m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_i}$$

3. Actio-Reactio: Eine Kraft von Körper A auf Körper B geht immer mit einer gleich großen, aber entgegen gerichteten Kraft von Körper B auf Körper A einher.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

# Gaussische Fehlerfortpflanzung

### Kinematik

$$\omega = 2\pi f \quad f = 1/T \quad v_T = \frac{v}{r} = r\omega$$

$$a_{zp} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

s, v, a und  $\theta, \omega, \alpha$ : Konstante Linearbeschleunigung oder Winkelbeschleunigung

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

$$s = s_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{2as - 2as_0 + v_0^2}}{a}$$

Translation + Rotation um eine fixe Achse A

$$\mathbf{s}_P(t) = \mathbf{s}_A(t) + r_{AP}\boldsymbol{\omega}(t)$$

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_A(t) + r_{AP}\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_\phi(t)$$

$$\mathbf{a}_P(t) = \mathbf{a}_A(t) + r_{AP}\boldsymbol{\alpha}(t) \times \mathbf{e}_\phi(t) - r_{AP}\boldsymbol{\omega}(t)^2 \mathbf{e}_r(0)$$

Gaussische Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f^2 = \left( \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x} \Big|_{x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta x \right)^2 +$$

$$\left( \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial y} \Big|_{x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta y \right)^2 +$$

$$\left( \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial z} \Big|_{x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta z \right)^2 + \dots$$

### Kinetik

$$\mathbf{P} = M_{sp} \mathbf{v}_{sp} \quad \mathbf{L} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Schwerpunkt:  $\mathbf{R}_{sp} = \frac{\sum m_a \mathbf{r}_a}{\sum m_a}$

Trägheitsmoment:  $\mathbf{J}_S = \sum m_i \mathbf{r}_{i,S}^2$

Satz von Steiner:  $J_A = J_{SP} + m d_A^2$

$$E_{kin} = 1/2 m v^2 + 1/2 J \omega^2$$

$$E_{pot} = - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Reibungskraft:  $F_R = -\mu F_n = -\mu \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n$

Federkraft:  $F_F = -k \Delta x$

### Stöße

Gerade, zentral, teilelastisch

$$v_1' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 (v_1 - v_2) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 (v_2 - v_1) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta U = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 (1 - C_R^2)$$

$$C = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} \quad \text{mit} \quad 0 \leq C \leq 1$$

### Koordinatensysteme

Polarkoordinaten (r,  $\theta$ )

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \omega \mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\omega \mathbf{e}_r$$

Zylindrische Koordinaten (r,  $\theta$ , z)

$$\mathbf{s}(t) = r(t) \mathbf{e}_r(\theta(t)) + z(t) \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{v} = \dot{s} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{z} \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r) \mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta} r) \mathbf{e}_\theta + \ddot{z} \mathbf{e}_z$$

Affine Transformation:  $\mathbf{x}_C = [{}^C A_L] \mathbf{x}_L + \mathbf{t}_{L \rightarrow C}$

Elementarrotationen (negativer Drehsinn)

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Kinematische Kette

Freiheitsgrade in 3D:  $M = 6n - \sum_{i=1}^j (6 - f_j)$

Jacobimatrix (z.B. für  $x_1, x_2, x_3$ ):

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Zweikörperkette

$$X_P = l_1 \cos \alpha_1$$

$$Y_P = l_1 \sin \alpha_1$$

$$X_Q = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$Y_Q = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$

# Gauss'sche Fehlerfortpflanzung

Voneinander unabhängige fehlerbehaftete Größen

Gauss'sche Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f^2 = \left( \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x} \Big|_{x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta x \right)^2 + \left( \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial y} \Big|_{x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta y \right)^2 + \left( \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial z} \Big|_{x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta z \right)^2 + \dots$$

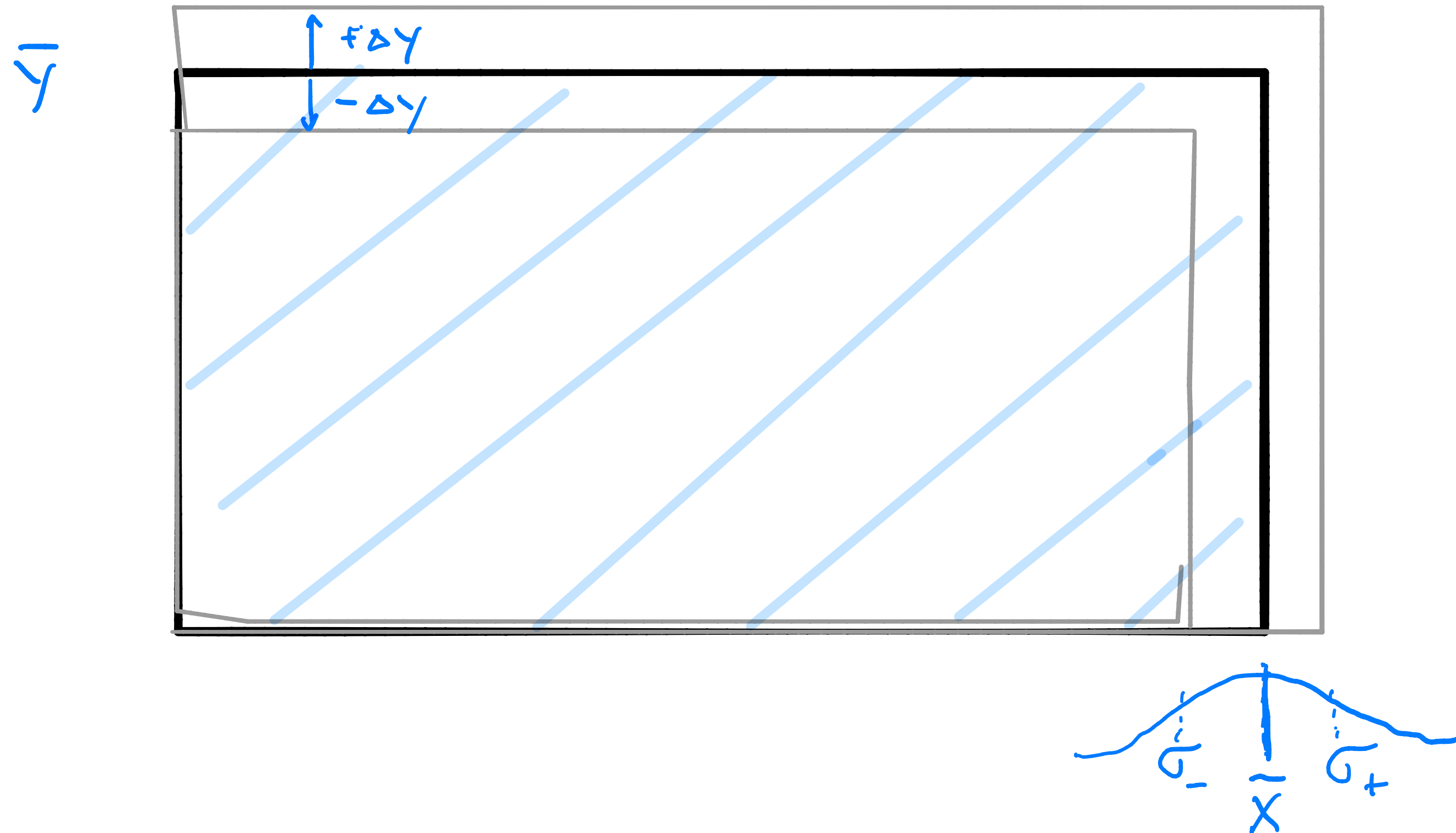
$\Delta f$  := absolute Unsicherheit  
 $\frac{\Delta f}{f}$  := relative Unsicherheit

$f$  := Gesuchte Funktion (Energie, Formel,..)

$\Delta x, \Delta y$  := Messfehler

# Beispiel – Gauss'sche Fehlerfortpflanzung

↳ unabhängige Messungen  
⇒ keine Korrelation



$$\Delta f^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \Delta x_j \right)^2 + \dots$$

$$\begin{array}{ll} \bar{x} \pm \Delta x & \bar{y} \pm \Delta y \\ 4 \pm 1 & 3 \pm 1 \end{array}$$

$$\rightarrow f(x, y) = xy = 12$$

$$\Delta f^2 = (y \cdot \Delta x)^2 + (x \cdot \Delta y)^2$$

$$\Delta f = \sqrt{(3 \cdot 1)^2 + (4 \cdot 1)^2} = 5 \sim \text{absoluter Fehler}$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{5}{12} \approx 42\% \sim \text{relativer Fehler}$$

# Übung I – Gauss'sche Fehlerfortpflanzung FS19

$$\Delta f^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \right)^2 + \dots$$

Sie messen als Sportwissenschaftler bei den olympischen Spielen die sportliche Leistung der Topathleten in der Startphase beim Sprint. Mittels eines Beschleunigungssensors messen Sie eine konstante Beschleunigung von

$$a = 1.5 \text{ m/s}^2$$

über einen Zeitraum von

$$t = 7.3 \text{ s}$$

und bestimmen daraus den zurückgelegten Weg

$x$

. Wie gross ist die absolute Messunsicherheit

$\Delta x$

wenn die Unsicherheit der Beschleunigungsmessung

$$\Delta a = 0.1 \text{ m/s}^2$$

und die Unsicherheit der Zeitmessung

$$\Delta t = 0.2 \text{ s}$$

beträgt?

ges:  $\Delta x$

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + \cancel{v_0 t} + \cancel{x_0}$$

$$\Delta x \textcircled{2} = \left( \frac{\partial x}{\partial a} \cdot \Delta a \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \Delta t \right)^2$$

$$= \left( \frac{1}{2} t^2 \cdot \Delta a \right)^2 + \left( a t \cdot \Delta t \right)^2$$

$$= 7.1 + 4.79$$

$$\Delta x = \underline{\underline{3.45 \text{ m}}} := \text{absolut}$$

$$\underline{\underline{39.96 \pm 3.45 \text{ m}}}$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{3.45 \text{ m}}{\frac{1}{2} (1.5) (7.3)^2} = \frac{3.45}{39.96} \approx 8.6\% := \text{relativ}$$

# Kinematik

## Allgemeine Bewegung, Ebene Bewegung

**Kinematik**

$\omega = 2\pi f \quad f = 1/T \quad v_T = \frac{v}{r} = r\omega$   
 $a_{zp} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$

$s, v, a$  und  $\theta, \omega, \alpha$ : Konstante Linearbeschleunigung oder Winkelbeschleunigung

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

$$s = s_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{2as - 2as_0 + v_0^2}}{a}$$

Translation + Rotation um eine fixe Achse  $A$

$$\mathbf{s}_P(t) = \mathbf{s}_A(t) + r_{AP}\mathbf{e}_r(t)$$

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_A(t) + r_{AP}\omega(t)\mathbf{e}_\phi(t)$$

$$\mathbf{a}_P(t) = \mathbf{a}_A(t) + r_{AP}\alpha(t)\mathbf{e}_\phi(t) - r_{AP}\omega(t)^2\mathbf{e}_r(0)$$

Gauss'sche Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f^2 = \left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x}\right)_{|x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial y}\right)_{|x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta y)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial z}\right)_{|x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta z)^2 + \dots$$

**Stöße**

Gerade, zentral, teilelastisch

$$v_1' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 (v_1 - v_2) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 (v_2 - v_1) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta U = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 (1 - C_R^2)$$

$$C = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} \quad \text{mit} \quad 0 \leq C \leq 1$$

**Koordinatensysteme**

Polarkoordinaten  $(r, \theta)$

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \omega \mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\omega \mathbf{e}_r$$

Zylindrische Koordinaten  $(r, \theta, z)$

$$\mathbf{s}(t) = r(t)\mathbf{e}_r(\theta(t)) + z(t)\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{v} = \dot{s} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta}r)\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z$$

Affine Transformation:  $\mathbf{x}_C = [{}^C A_L] \mathbf{x}_L + \mathbf{t}_{L \rightarrow C}$

Elementarrotationen (negativer Drehsinn)

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Kinetik**

$$\mathbf{P} = M_{sp} \mathbf{v}_{sp} \quad \mathbf{L} = \mathbf{J}\omega = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Schwerpunkt:  $\mathbf{R}_{sp} = \frac{\sum m_a \mathbf{r}_a}{\sum m_a}$

Trägheitsmoment:  $\mathbf{J}_S = \sum m_i \mathbf{r}_{i,S}^2$

Satz von Steiner:  $J_A = J_{SP} + m d_A^2$

$$E_{kin} = 1/2 m v^2 + 1/2 J \omega^2$$

$$E_{pot} = - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Reibungskraft:  $F_R = -\mu F_n = -\mu \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n$

Federkraft:  $F_F = -k \Delta x$

**Kinematische Kette**

Freiheitsgrade in 3D:  $M = 6n - \sum_{i=1}^j (6 - f_j)$

Jacobimatrix (z.B. für  $x_1, x_2, x_3$ ):

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Zweikörperkette

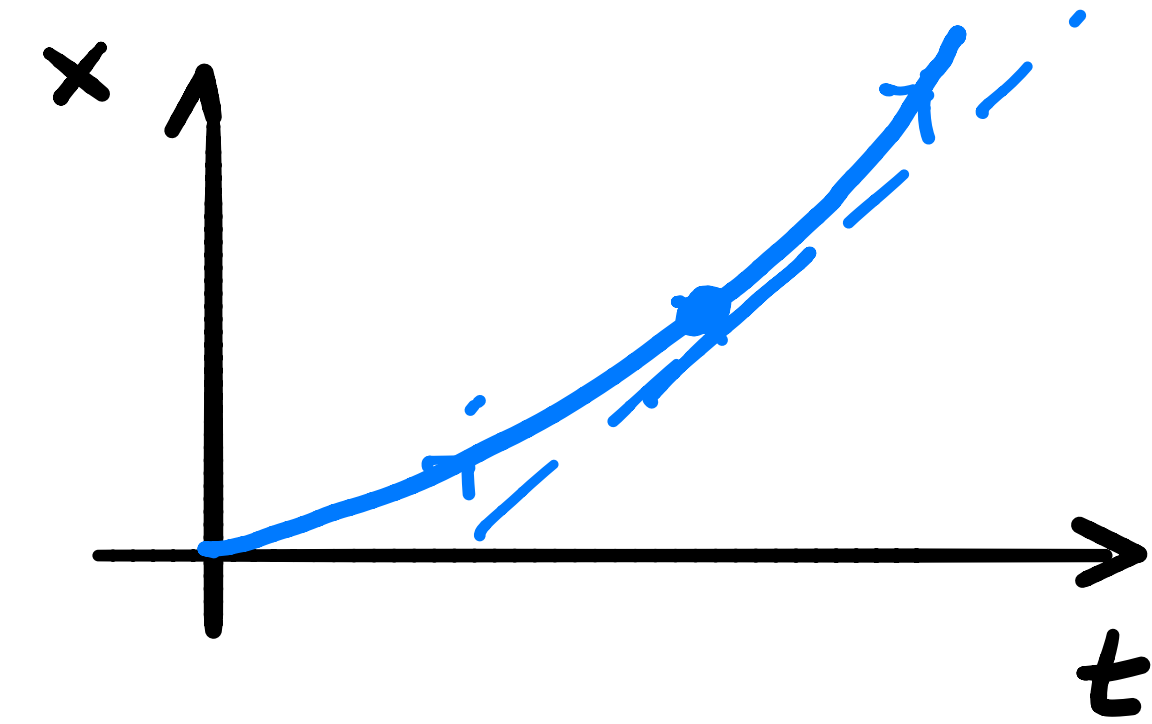
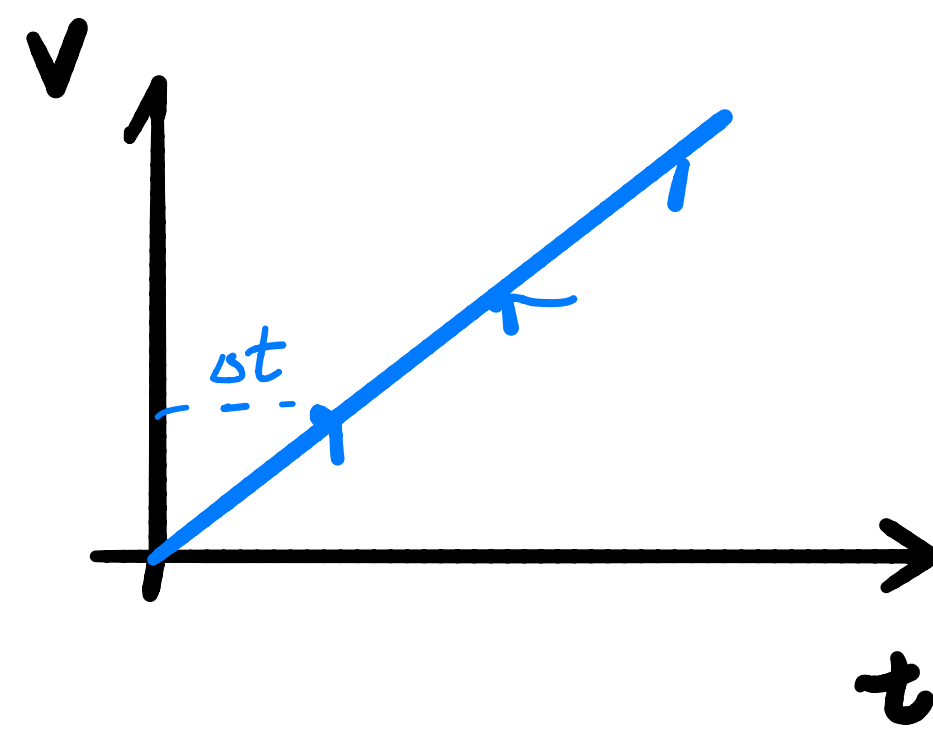
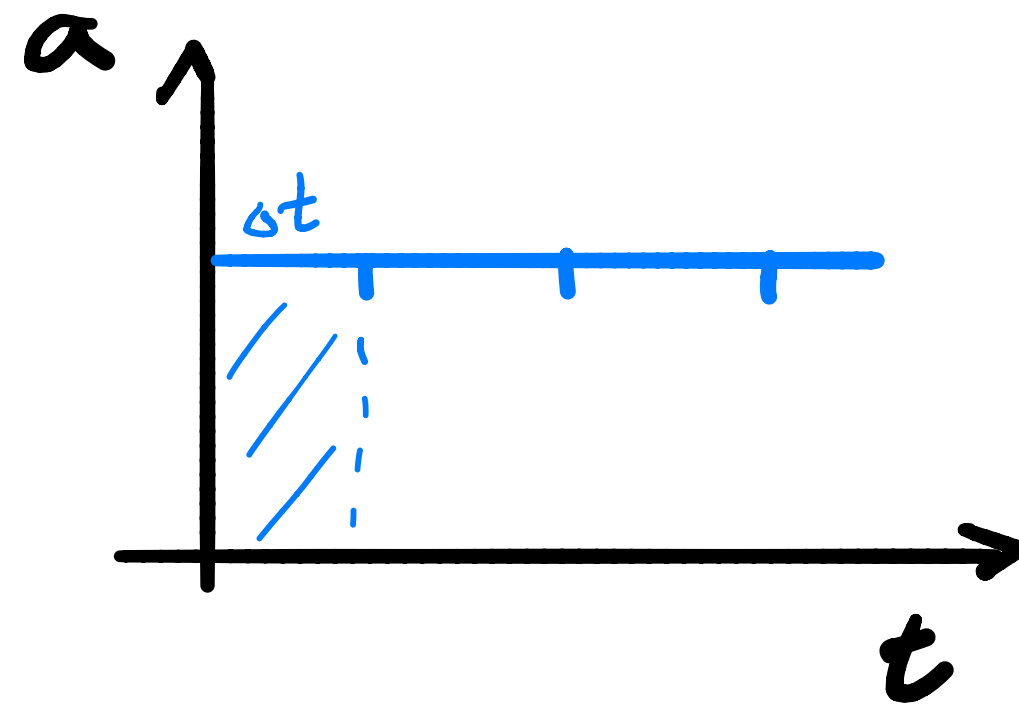
$$X_P = l_1 \cos \alpha_1$$

$$Y_P = l_1 \sin \alpha_1$$

$$X_Q = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$Y_Q = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$

# Kinematik



$s, v, a$  und  $\theta, \omega, \alpha$ : Konstante Linearbeschleunigung oder Winkelbeschleunigung

$$\underline{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{2as - 2as_0 + v_0^2}}{a}$$

$$\frac{da}{dt} = 0$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\int \ddot{x} dt = \dot{x}t + c = \dot{x} = v$$

$$\iint \ddot{x} dt = \frac{1}{2} \ddot{x} t^2 + \underbrace{ct}_{v_0 t} + \underbrace{d}_{x_0} = x$$

## Übung II - Kinematik

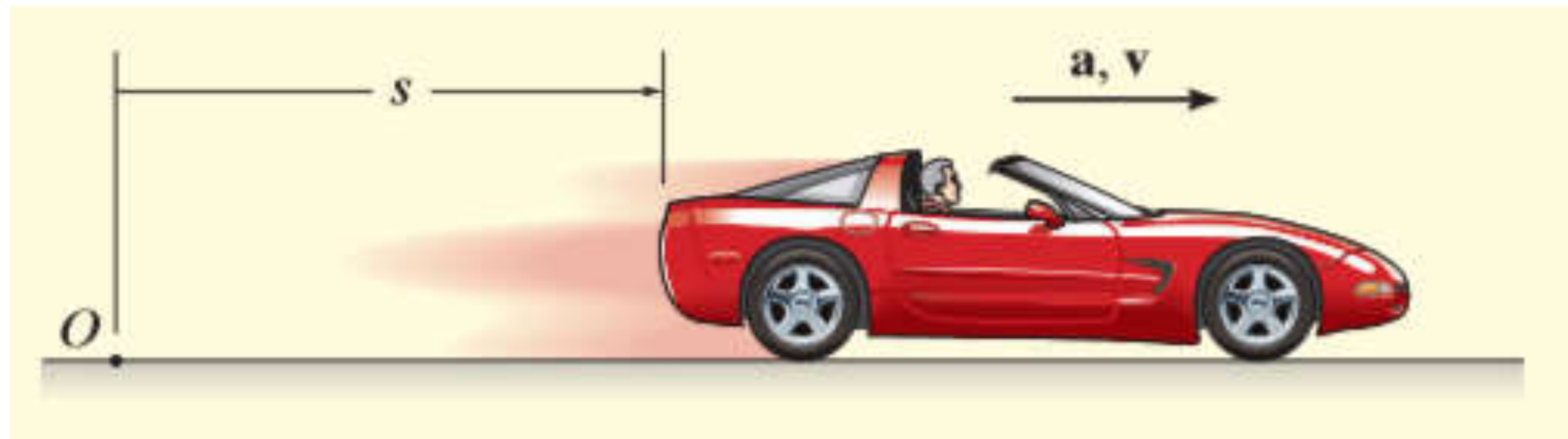
Ein Auto bewegt sich geradlinig, sodass die Geschwindigkeit durch  $v = (3t^2 + 2t) \frac{m}{s}$ , wobei  $t$  Sekunden sind. Bestimme

a) die Position und

b) die Beschleunigung

wenn  $t = 3 s$ .

Angenommen  $t_0 = 0, s_0 = 0$ .



~~geg~~ :  $v(t) = (3t^2 + 2t) \frac{m}{s}$

a) ~~ges~~ :  $s(t=3s)$

$$s = \int v dt = \int 3t^2 dt + \int 2t dt$$

$$= t^3 + t^2 + s_0$$

$$s(0) = s_0 \stackrel{!}{=} 0$$

$$s(t=3s) = 27 + 9 + 0 = \underline{\underline{36 m}}$$

b) ~~ges~~ :  $a(t=3s)$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a = 6t + 2$$

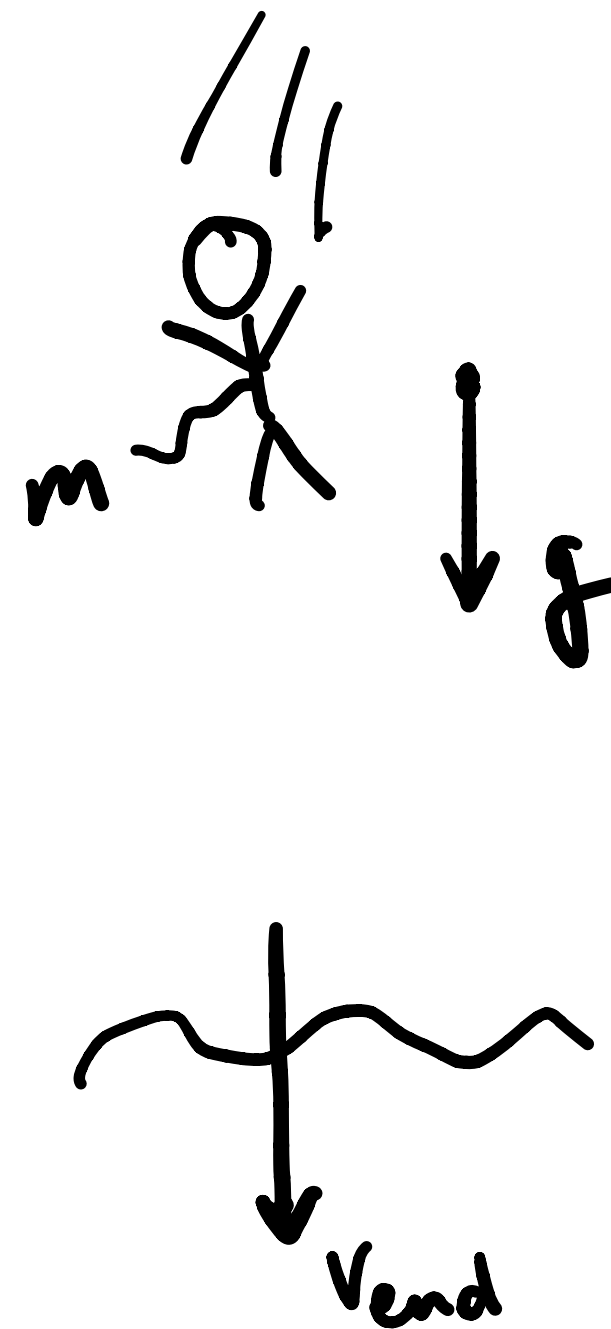
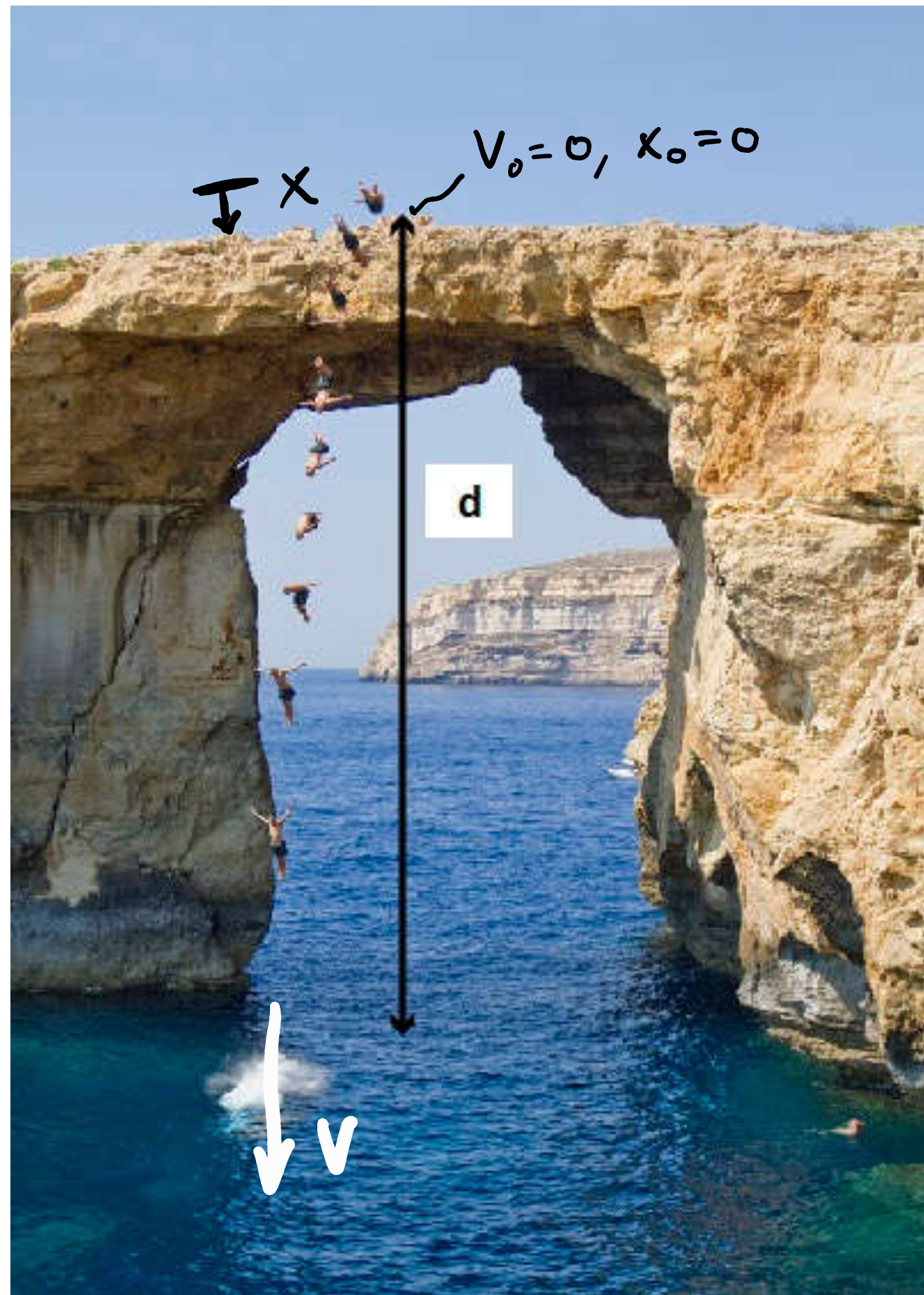
$$a(3) = 18 + 2 = \underline{\underline{20 \frac{m}{s^2}}}$$

nicht konstant (keine Formel auf der FS)



# Übung III - Kinematik FS18

Ein Klippenspringer springt von einer  $d = 29\text{m}$  hohen Klippe ins Wasser. Mit welcher vertikalen Geschwindigkeit trifft der Klippenspringer aufs Wasser auf? Der Luftwiderstand kann vernachlässigt werden.



$$\ddot{x} = g$$

$$v = \int g dt = gt + v_0$$

$$x = \int gt dt = \frac{1}{2}gt^2 + x_0$$

$$x_{\text{end}} = d = 29\text{m} = \frac{1}{2}gt_{\text{end}}^2 \leadsto t_{\text{end}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 29}{g}}$$

$$v_{\text{end}} = gt_{\text{end}} = g \sqrt{\frac{2 \cdot 29}{g}} = \sqrt{g \cdot 58} = \underline{\underline{23.85 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$v_{\text{end}}^2 = 0 + 2g(29 - 0)$$

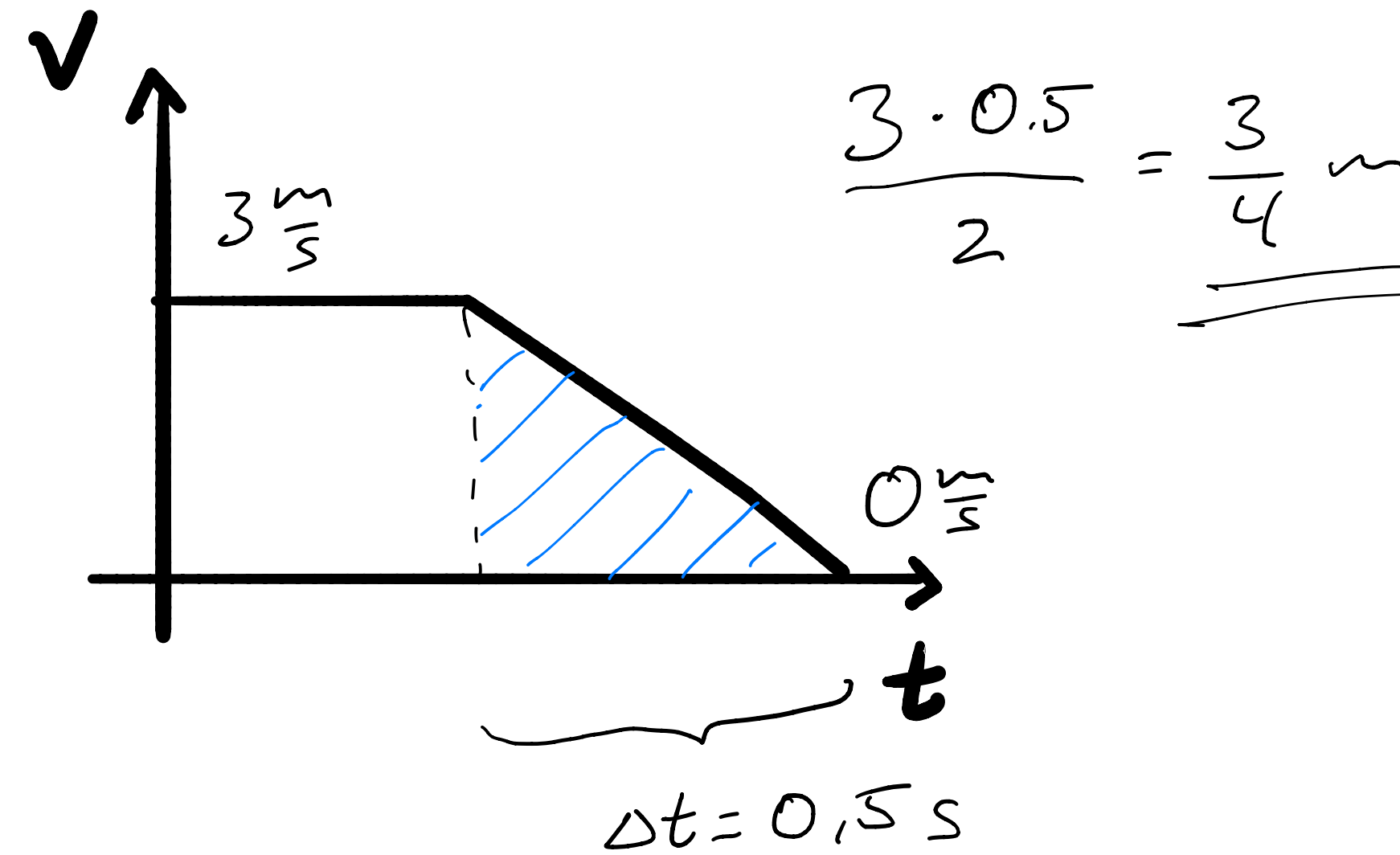
$$v_{\text{end}} = \sqrt{g \cdot 2 \cdot 29} = *$$

# Übung IV – Kinematik FS18

Eine Person ( $m = 80\text{kg}$ ) tritt beim Gehen mit einer Geschwindigkeit von  $v = 3\text{m/s}$  auf den Boden auf. Die Bewegung wird in  $t = 0.5\text{s}$  linear abgebremst.

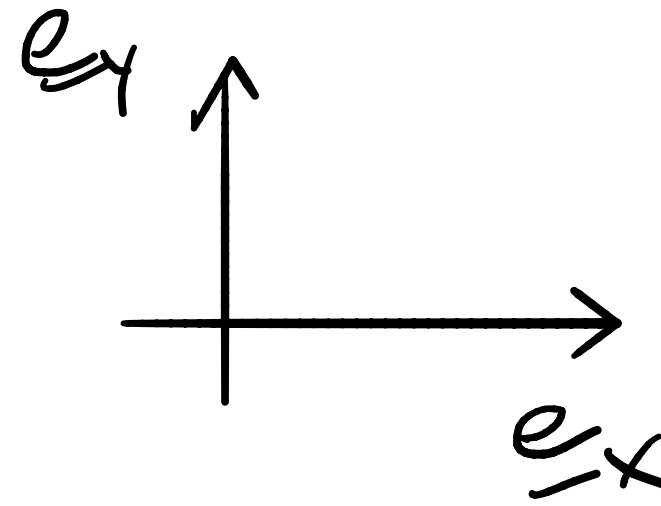
Berechnen Sie über welche Distanz die Bewegung abgebremst wird.

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t \\ &= 0 + \frac{1}{2}(3 + 0) \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \text{ m} \\ &= 0,75 \text{ m}\end{aligned}$$



# 2D Koordinatensysteme

Koordinaten	kartesisch	polar
kartesisch	$v = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$
polar	$x = r \cos \varphi$ $y = r \sin \varphi$	$v = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} \end{pmatrix}$



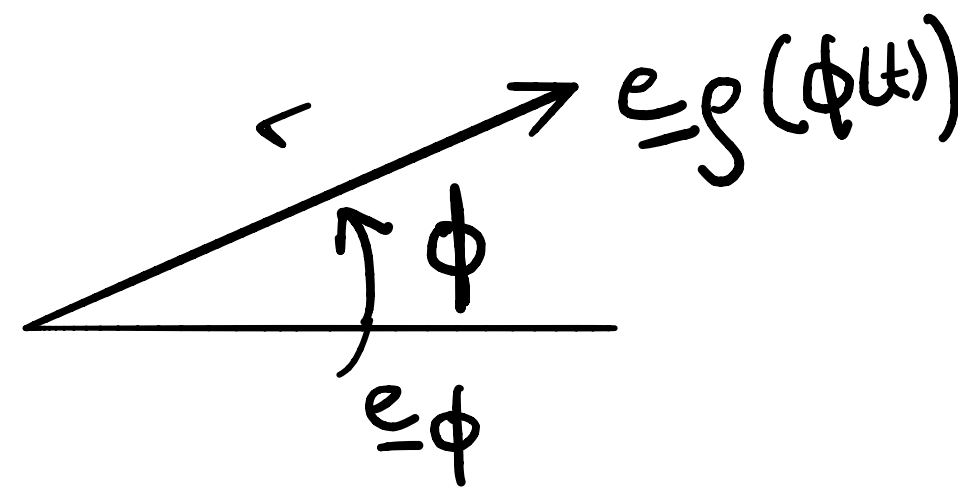
**KARTESISCH:**  
 $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y$   
 $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$

**Polar**  
 $\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho(\varphi(t))$   
 $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

Polarkoordinaten( $r, \phi$ )

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \omega\vec{e}_\phi$$

$$\frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = -\omega\vec{e}_r$$



# 3D Koordinatensysteme

Koordinaten	kartesisch	zylindrisch	sphärisch
kartesisch	$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ $z = z$	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$ $\psi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$
zylindrisch	$x = \rho \cos \varphi$ $y = \rho \sin \varphi$ $z = z$	$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \rho \dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$	$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ $\theta = \tan^{-1} \frac{\rho}{z}$ $\psi = \varphi$
sphärisch	$x = r \sin \theta \cos \psi$ $y = r \sin \theta \sin \psi$ $z = r \cos \theta$	$\rho = r \sin \theta$ $\varphi = \psi$ $z = r \cos \theta$	$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \dot{\theta} \\ r \sin \theta \dot{\psi} \end{pmatrix}$

**KARTESISCH:**

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

**ZYLINDRISCH:**

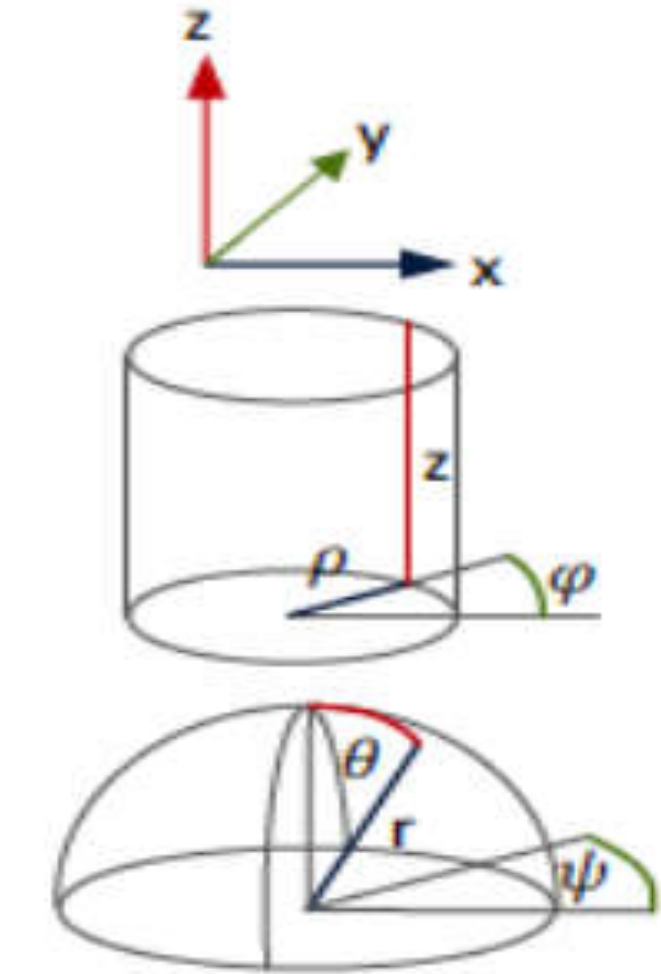
$$\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho(\varphi(t)) + z(t)\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$$

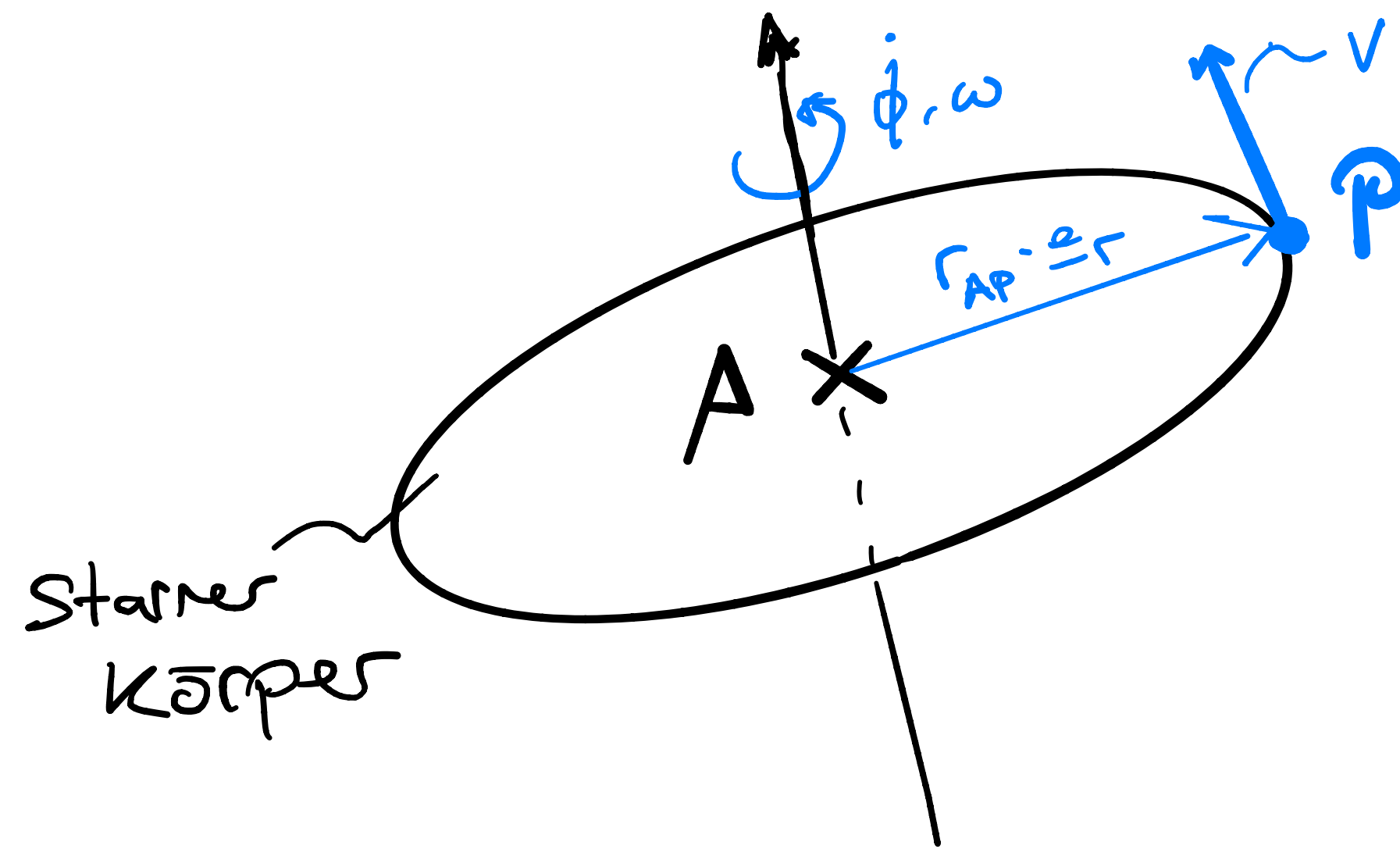
**SPHÄRISCH:**

$$\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r(\psi(t), \theta(t))$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\psi}\vec{e}_\psi$$



# Kinematik



Polarkoordinaten  $(r, \phi)$

$$\frac{de_r}{dt} = \underline{\omega e_\phi}$$

$$\frac{de_\phi}{dt} = \underline{-\omega e_r}$$

Translation + Rotation um eine fixe Achse A

$$\underline{s_P}(t) = \underline{s_A}(t) + r_{AP} \underline{e_r}(t)$$

$$\underline{v_P}(t) = \underline{v_A}(t) + r_{AP} \omega(t) \underline{e_\phi}(t)$$

$$\underline{a_P}(t) = \underline{a_A}(t) + r_{AP} \alpha(t) \underline{e_\phi}(t) - \underbrace{r_{AP} \omega(t)^2 \underline{e_r}(t)}_{a_{ZP}}$$

↳  $r_{AP}$  const  
 $\dot{\omega}$  const  
 $\alpha$

$$r_{AP} = |\underline{AP}| = |\underline{OP} - \underline{OA}| = |\underline{s_P} - \underline{s_A}| \quad (\text{"Spitze - Anfang"})$$

$$\underline{r_{AP}} \underline{e_r} = \underline{s_P} - \underline{s_A} \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} \right.$$

$$\Rightarrow \underline{v_P} = \underline{v_A} + \omega \underline{e_\phi} \times \underline{r_{AP}} \underline{e_r} + \dot{r}_{AP} \dots \left| \frac{\partial}{\partial t} \right.$$

$$\Rightarrow \underline{a_P} = \dots$$

# Allgemeine Bewegung des starren Körpers (3D)

Die Kinematik beschreibt den Bewegungszustand des starren Körpers

$$\{\underline{\mathbf{v}}_A, \underline{\boldsymbol{\omega}}\} \quad (18)$$

**Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes (ABBA)**

$$\underline{\mathbf{v}}_A = \underline{\mathbf{v}}_B + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{BA}} = \begin{pmatrix} v_{bx} \\ v_{by} \\ v_{bz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix} \quad (19)$$

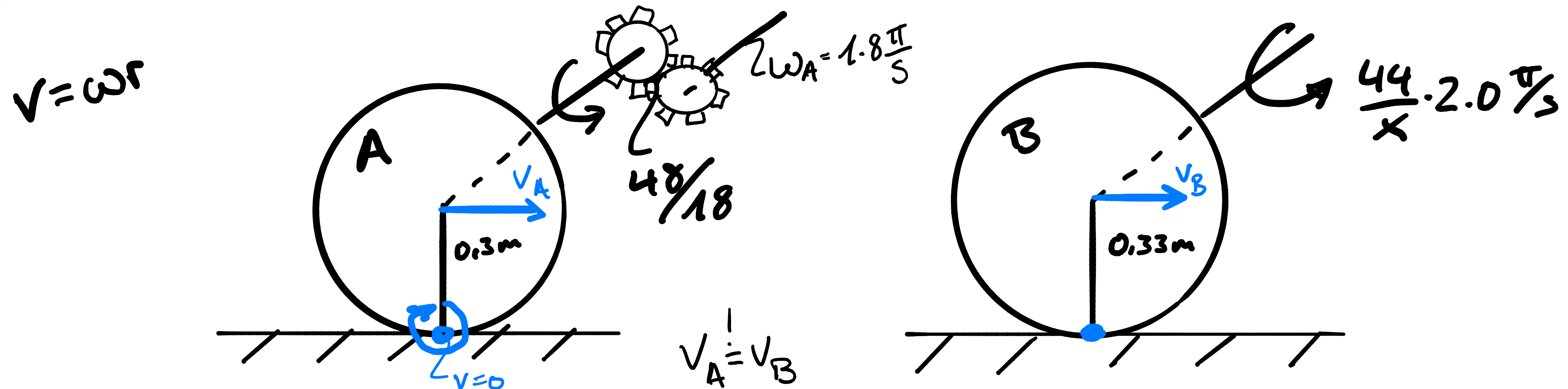
Eine momentane Bewegung im Raum ist wie erwähnt entweder

- eine **Translation** (4.2), falls  $\underline{\boldsymbol{\omega}} = 0$  ist,
- eine **Rotation** (4.3), falls  $\underline{\boldsymbol{\omega}} \neq 0$  und  $\underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_B = 0$  ist oder
- eine **Schraubung**, falls  $\underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_B \neq 0$  ist.

# Übung V – Kinematik FS18

A fährt mit dem Citybike (Durchmesser  $d_A = 60\text{cm}$ ), tritt mit einer Winkelgeschwindigkeit von  $\omega_A = 1.8\pi/s$  und einem Gangverhältnis von  $48/18$ . B begleitet ihn auf einem Mountainbike (Durchmesser  $d = 66\text{cm}$ ) und tritt mit einer Winkelgeschwindigkeit von  $\omega_B = 2.0\pi/s$ .

Wenn B's Gangverhältnis  $44/X$  ist, wie gross muss  $X$  gewählt werden, um mit der gleichen Geschwindigkeit zu fahren wie A?



$$\left(\frac{48}{18} \cdot 1.8\right) \cdot 0.3 = \left(\frac{44}{X} \cdot 2.0\right) \cdot 0.33$$

$$X = \frac{18}{48} \cdot \frac{2.0}{1.8} \cdot \frac{0.33}{0.3} \approx \underline{\underline{20}}$$

$$\rightarrow \frac{44}{20} : B$$

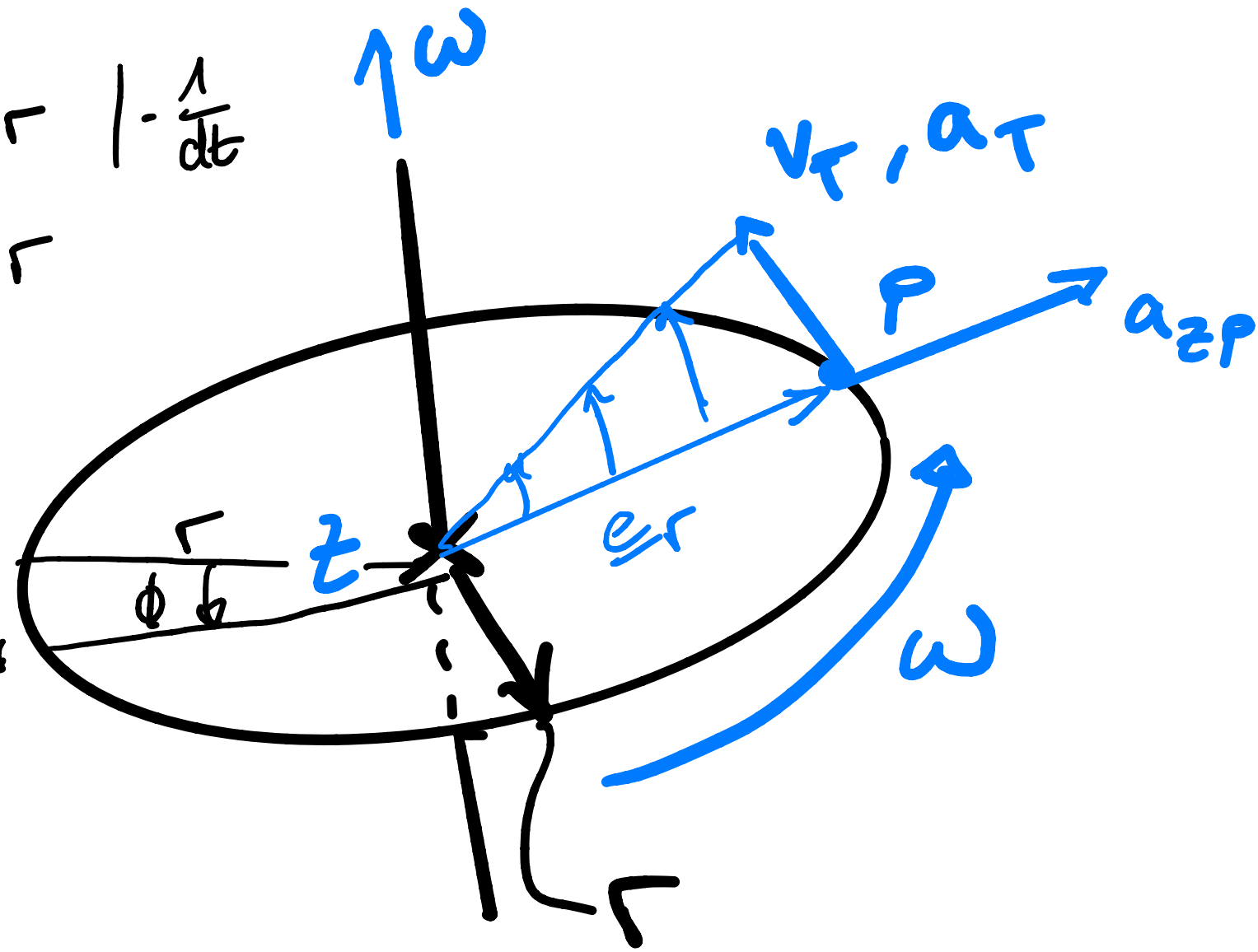
# Kinematik

$$\begin{aligned}
 +\ddot{x} &= +\ddot{\phi} r \\
 &= \dot{\omega} r \\
 &= \alpha r
 \end{aligned}$$

$a_T$

$$\begin{aligned}
 dx &= d\phi r \quad | \cdot \frac{1}{dt} \\
 \frac{dx}{dt} &= \frac{d\phi}{dt} r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s &\rightarrow x \\
 \phi &\rightarrow 0
 \end{aligned}$$



$$\omega = 2\pi f \quad f = 1/T \quad v_T = \frac{U}{T} = r\omega$$

$$a_{zp} = \frac{v_T^2}{r} = r\omega^2$$

$\hookrightarrow ma_{zp} := \text{Zentripetalkraft}$

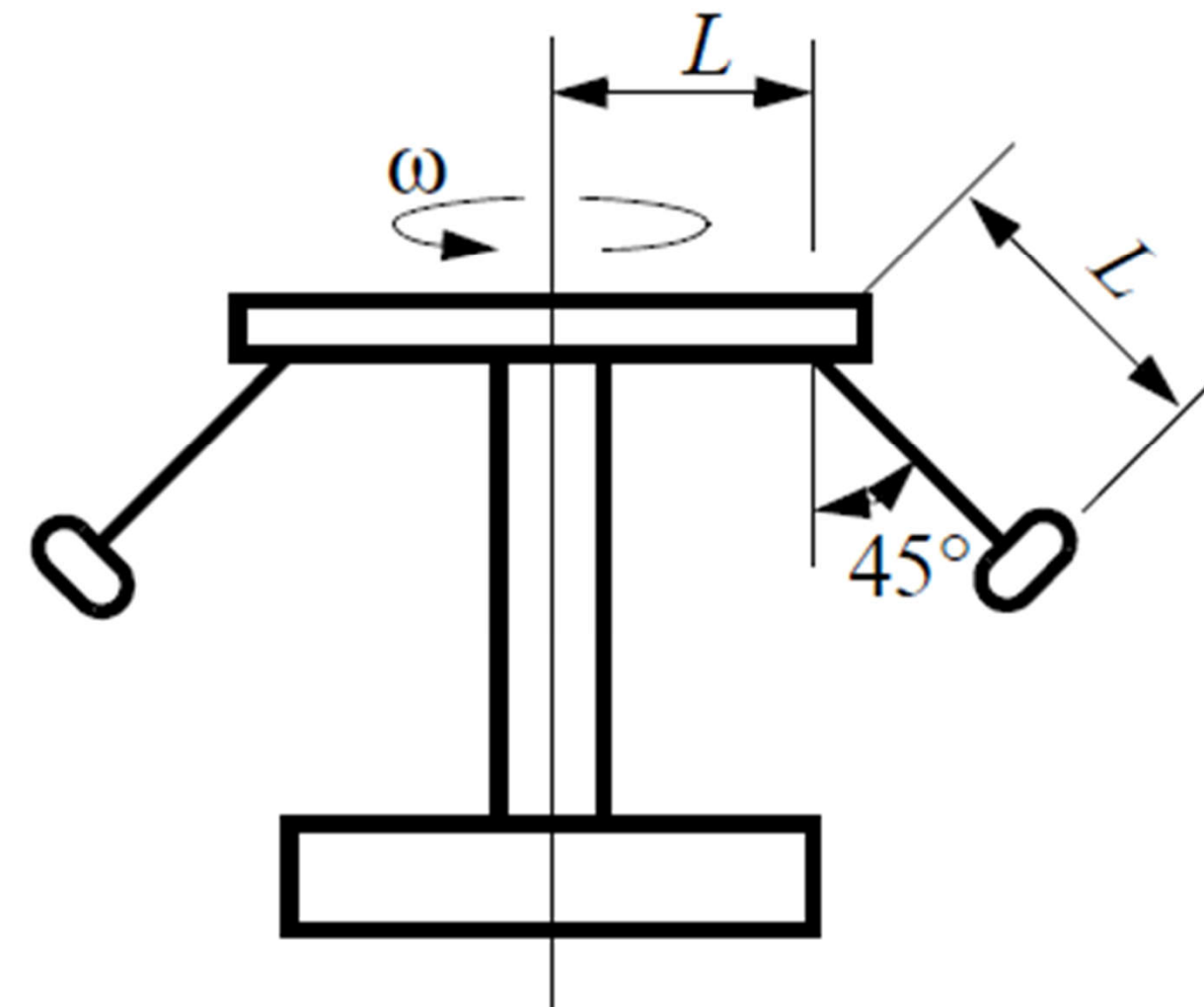


# Übung VI – Kinematik

Das im Bild dargestellte Karussell dreht mit der Rotationsgeschwindigkeit  $\omega$ .

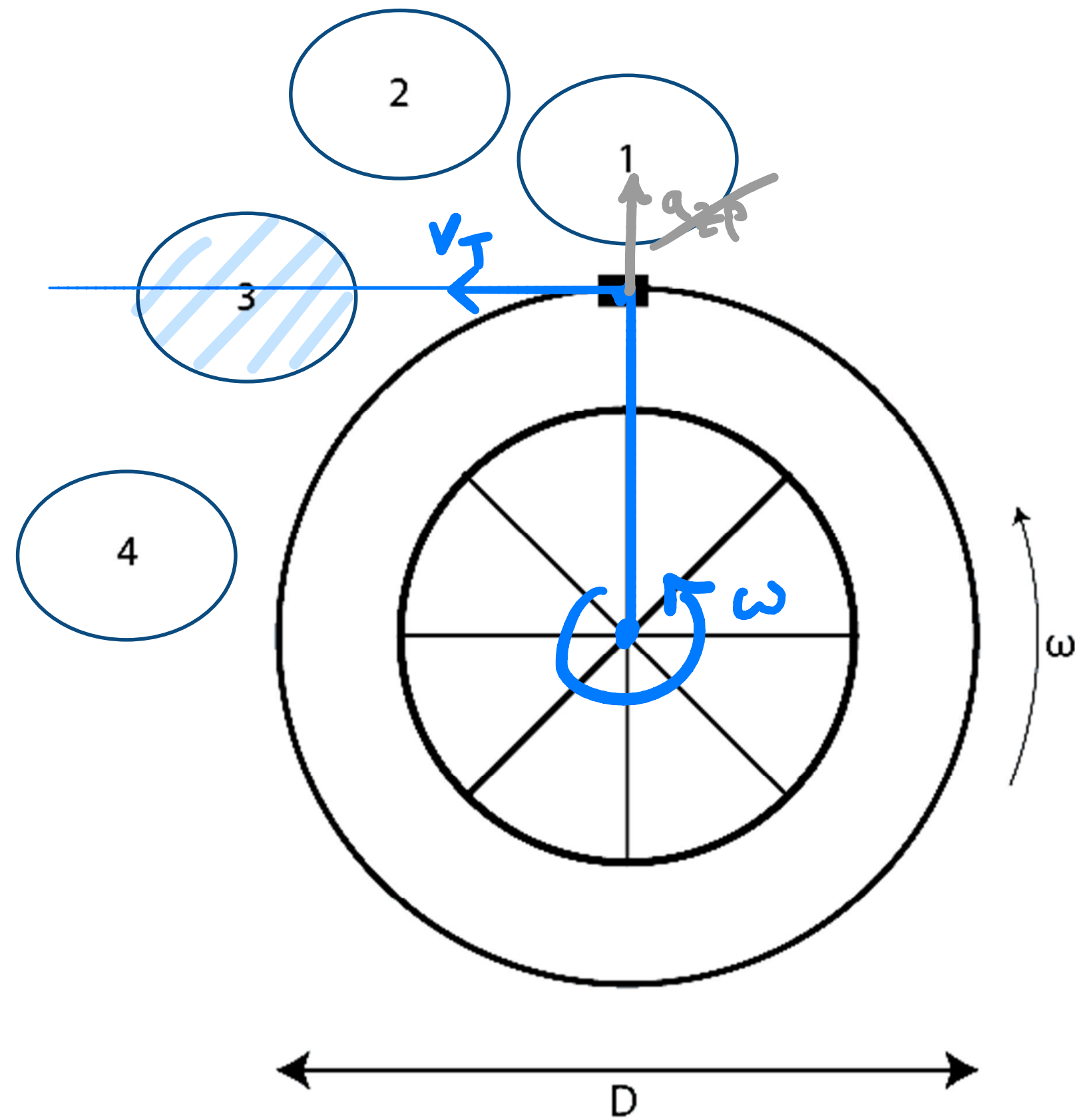
Wie gross ist die Schnelligkeit der Sessel?

$$v_s = L \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \omega$$



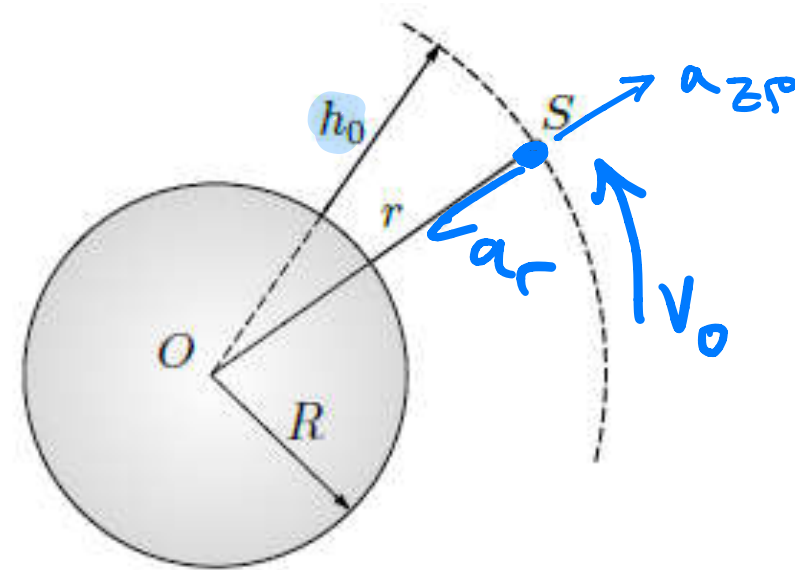
# Übung VII – Kinematik

Astrid fährt im Jahrmarkt in einem Karussell. Während der Fahrt gleitet ihr Portemonnaie aus ihrer Tasche (Ort gekennzeichnet durch das schwarze Rechteck). In welchem der Areale müssen sie ihr Portemonnaie nach der Fahrt suchen?



# Übung VIII – Kinematik

**Problem 6** A satellite moves on a circular trajectory of radius  $r$  around the Earth with radial acceleration  $a_r = -g \frac{R^2}{r^2}$ , where  $R$  is the radius of the Earth. The speed of the satellite is constant and denoted by  $v_0$ .



1. What is the height  $h_0$  of the trajectory, measured from the surface of the Earth?

(a)  $h_0 = \frac{gR^2}{v_0^2}$

(b)  $h_0 = g \left( \frac{R}{v_0} - 1 \right)$

**(c)  $h_0 = R \left( \frac{gR}{v_0^2} - 1 \right)$**

(d)  $h_0 = \sqrt{2}R \left( \frac{gR}{2v_0^2} - 1 \right)$

(e)  $h_0 = R \left( \frac{gR}{v_0} - 2 \right)$

2. How much time  $T$  does it take for the satellite to complete one complete round?

(a)  $T = g \frac{\pi R^2}{3v_0^3}$

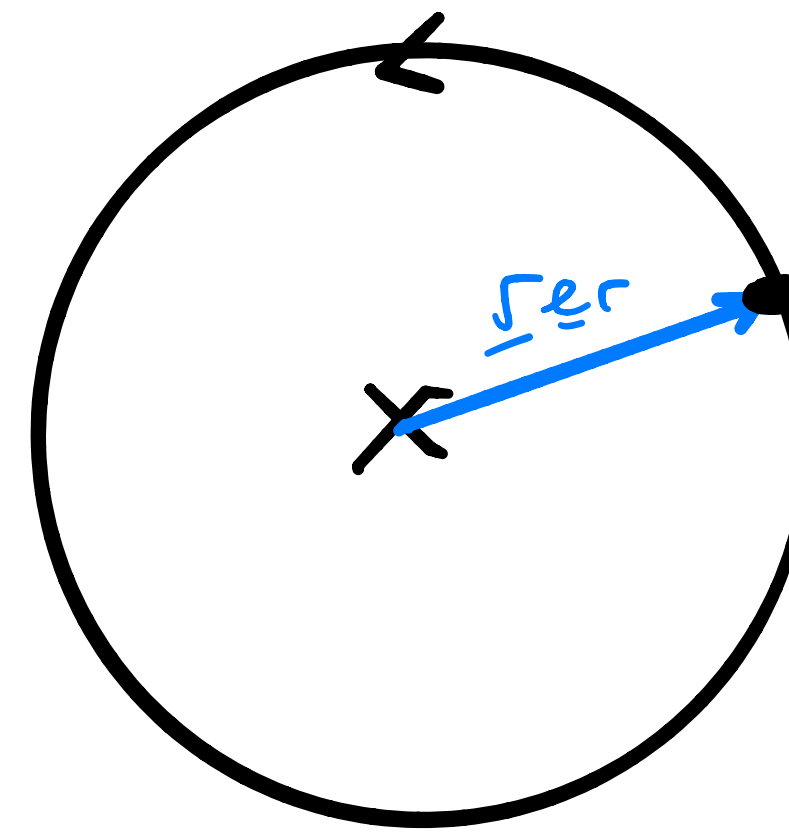
(b)  $T = g \frac{3\pi R^2}{4v_0^3}$

**(c)  $T = g \frac{2\pi R^2}{v_0^3}$**

(d)  $T = g \frac{2\pi R}{v_0^2}$

(e)  $T = g \frac{2\pi R^4}{3v_0^3}$

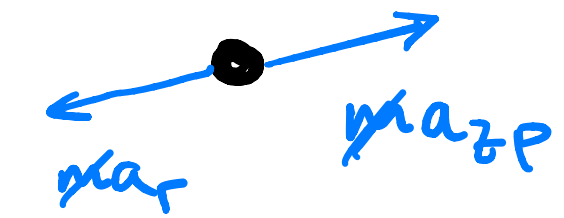
1)



$r$  const  
 $v_0$  const

ges:  $h_0$

$a_r = \ddot{r} - r\omega^2$



$$a_r = -g \frac{R^2}{r^2} = -r\omega^2 = -\frac{v_0^2}{r}$$

$$g \frac{R^2}{v_0^2} = \frac{v_0^2}{r} \Rightarrow r = g \frac{R^2}{v_0^2}$$

$$h_0 = r - R = R \left( g \frac{R}{v_0^2} - 1 \right)$$

2)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v_0} = \frac{2\pi}{v_0} \cdot \frac{g R^2}{v_0^2}$$

$$= \frac{2\pi}{v_0^3} g R^2$$

# Affine Transformationen

## Koordinatensysteme

### Kinematik

$$\omega = 2\pi f \quad f = 1/T \quad v_T = \frac{v}{r} = r\omega$$

$$a_{zp} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

s, v, a und  $\theta, \omega, \alpha$ : Konstante Linearbeschleunigung oder Winkelbeschleunigung

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

$$s = s_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{2as - 2as_0 + v_0^2}}{a}$$

Translation + Rotation um eine fixe Achse A

$$\mathbf{s}_P(t) = \mathbf{s}_A(t) + r_{AP}\mathbf{e}_r(t)$$

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_A(t) + r_{AP}\omega(t)\mathbf{e}_\phi(t)$$

$$\mathbf{a}_P(t) = \mathbf{a}_A(t) + r_{AP}\alpha(t)\mathbf{e}_\phi(t) - r_{AP}\omega(t)^2\mathbf{e}_r(0)$$

Gaussche Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f^2 = \left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x}\right)_{|x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta x)^2 +$$

$$\left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial y}\right)_{|x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta y)^2 +$$

$$\left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial z}\right)_{|x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta z)^2 + \dots$$

### Kinetik

$$\mathbf{P} = M_{sp}\mathbf{v}_{sp} \quad \mathbf{L} = \mathbf{J}\omega = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Schwerpunkt:  $\mathbf{R}_{sp} = \frac{\sum m_a \mathbf{r}_a}{\sum m_a}$

Trägheitsmoment:  $\mathbf{J}_S = \sum m_i \mathbf{r}_{i,S}^2$

Satz von Steiner:  $J_A = J_{SP} + m\mathbf{d}_A^2$

$$E_{kin} = 1/2m\mathbf{v}^2 + 1/2\mathbf{J}\omega^2$$

$$E_{pot} = - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Reibungskraft:  $F_R = -\mu F_n = -\mu \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n$

Federkraft:  $F_F = -k\Delta x$

### Stöße

Gerade, zentral, teilelastisch

$$v'_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 (v_1 - v_2) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 (v_2 - v_1) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta U = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 (1 - C_R^2)$$

$$C = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} \quad \text{mit} \quad 0 \leq C \leq 1$$

### Koordinatensysteme

Polarkoordinaten (r,  $\theta$ )

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \omega \mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\omega \mathbf{e}_r$$

Zylindrische Koordinaten (r,  $\theta$ , z)

$$\mathbf{s}(t) = r(t)\mathbf{e}_r(\theta(t)) + z(t)\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{v} = \dot{s} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta}r)\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z$$

Affine Transformation:  $\mathbf{x}_C = [{}^C A_L] \mathbf{x}_L + \mathbf{t}_{L \rightarrow C}$

Elementarrotationen (negativer Drehsinn)

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Kinematische Kette

Freiheitsgrade in 3D:  $M = 6n - \sum_{i=1}^j (6 - f_j)$

Jacobimatrix (z.B. für  $x_1, x_2, x_3$ ):

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Zweikörperkette

$$X_P = l_1 \cos \alpha_1$$

$$Y_P = l_1 \sin \alpha_1$$

$$X_Q = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

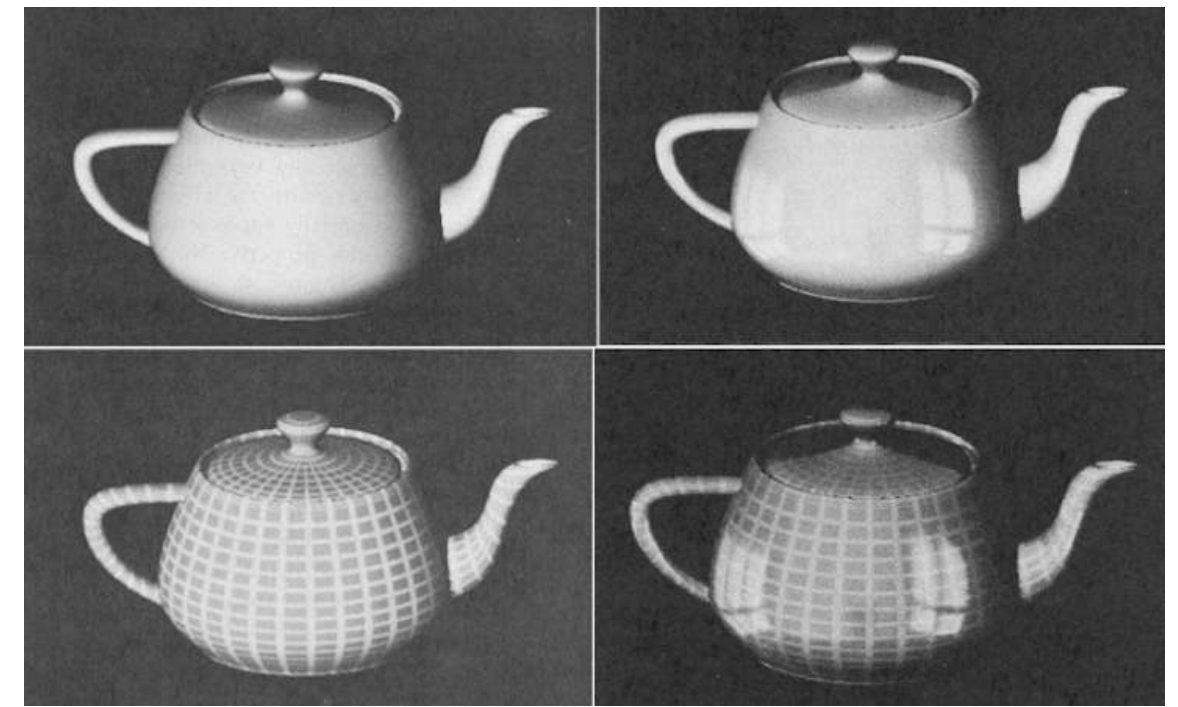
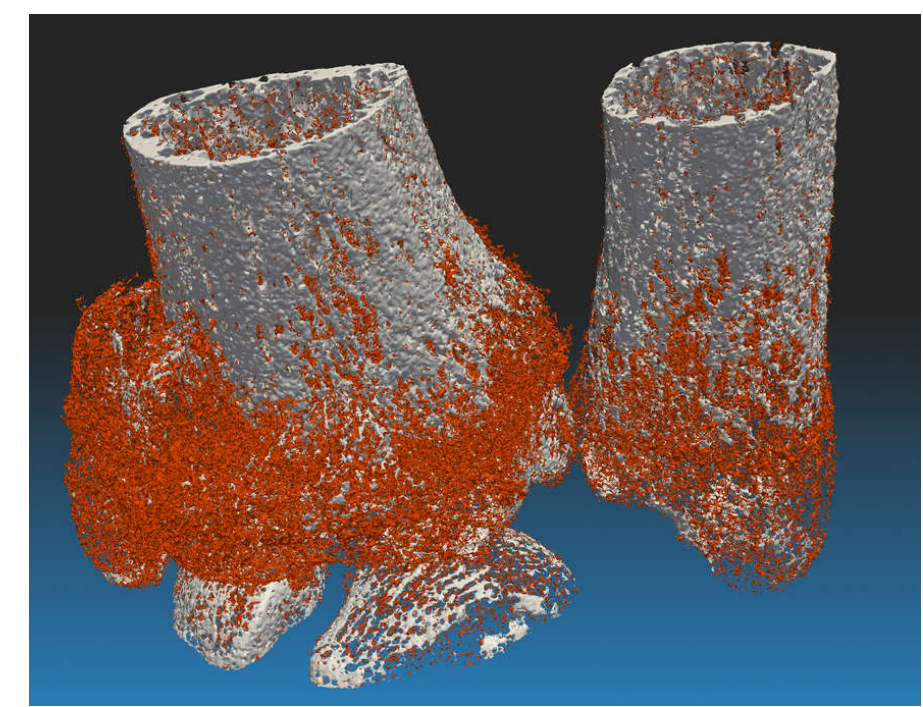
$$Y_Q = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$

# Affine Abbildung (Transformation)

Affine Transformation:  $\mathbf{x}_G = [{}^G A_L] \mathbf{x}_L + \mathbf{t}_{L \rightarrow G}$

Labels for the equation components:

- $\mathbf{x}_G$ : Transformierter Vektor
- $[{}^G A_L]$ : Rotationsmatrix (Handwritten: *Transformationmatrix*)
- $\mathbf{x}_L$ : Gegebener Vektor
- $\mathbf{t}_{L \rightarrow G}$ : Translationsvektor



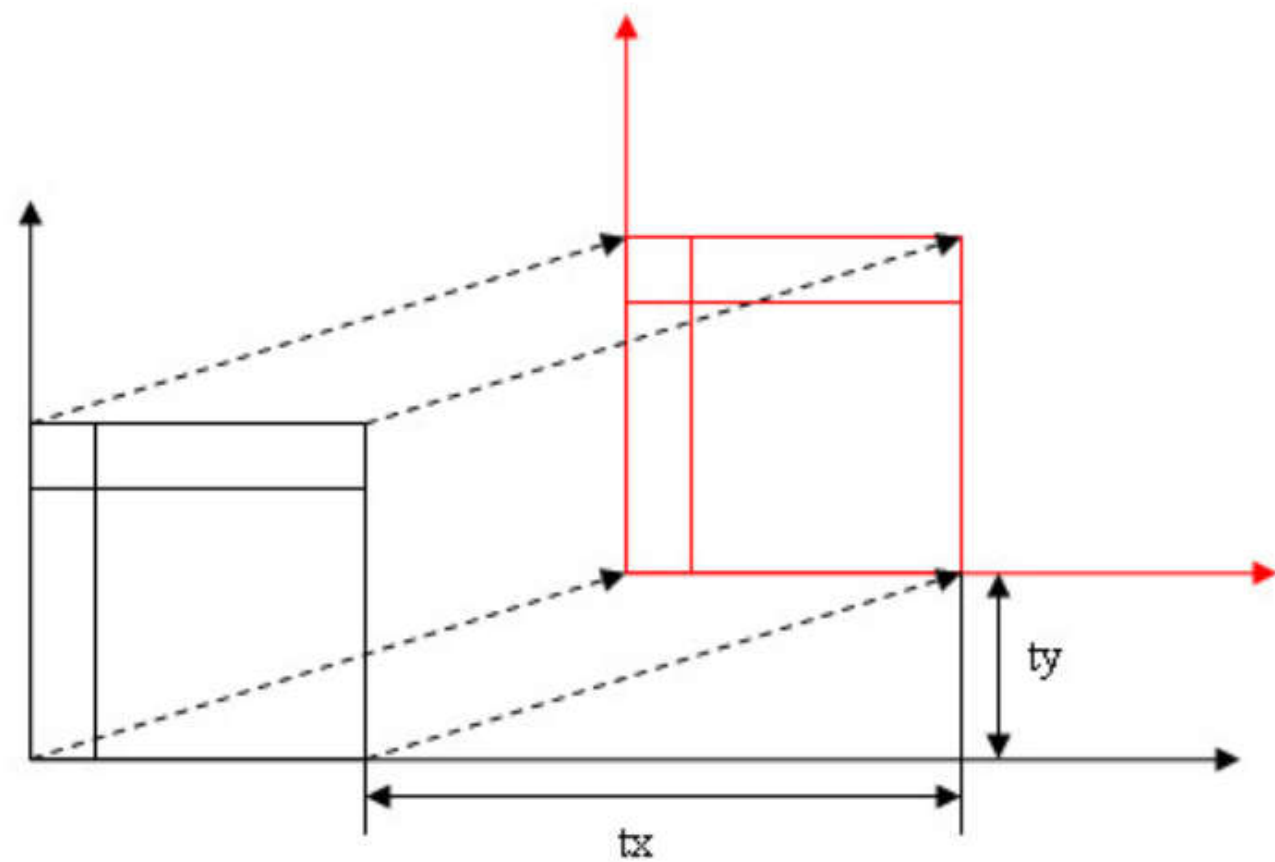
# Affine Abbildung (Transformation)

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \mathcal{R}: A \rightarrow B$$

$$P_A = [{}^A R_B] P_B + t_{B \rightarrow A}, \quad t_{B \rightarrow A} = -[{}^A R_B] t_{A \rightarrow B}$$

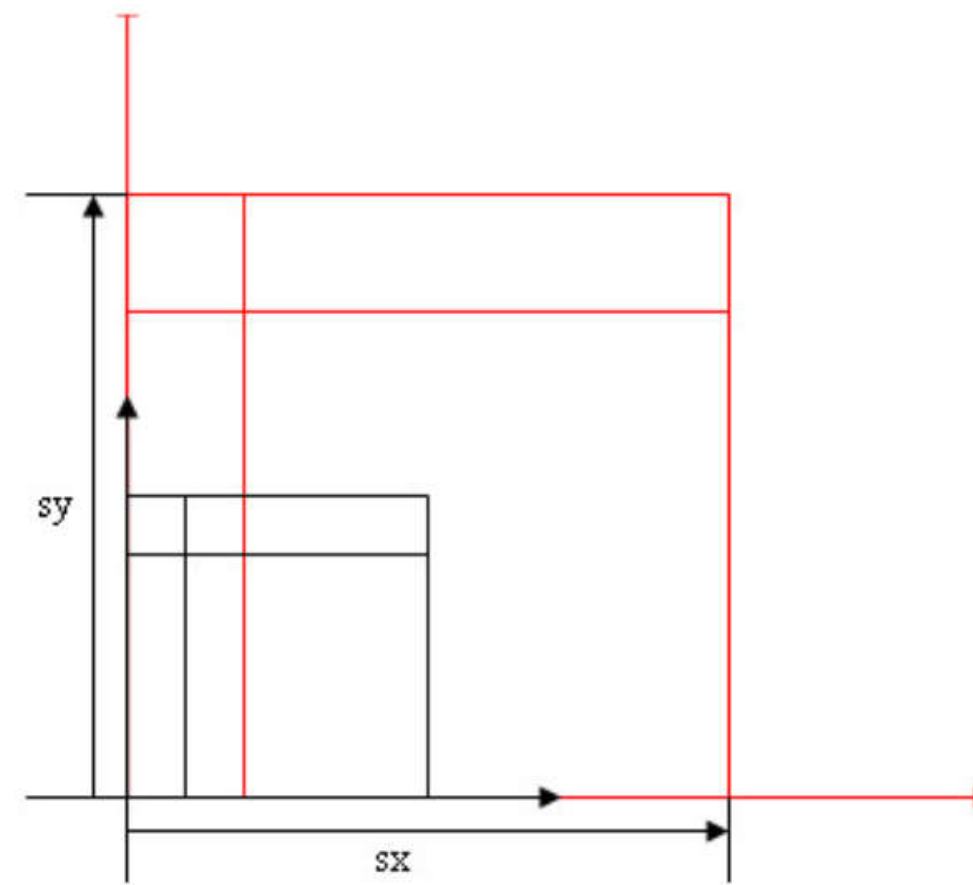
- eine Abbildung zwischen zwei affinen Räumen, bei der Kollinearität, Parallelität und Teilverhältnisse bewahrt bleiben oder gegenstandslos werden

$\mathcal{L}[\mathcal{R}]$  ist orthogonal  
 $R^T = R^{-1}$   
 $\hookrightarrow \det |R| = \pm 1$



translation

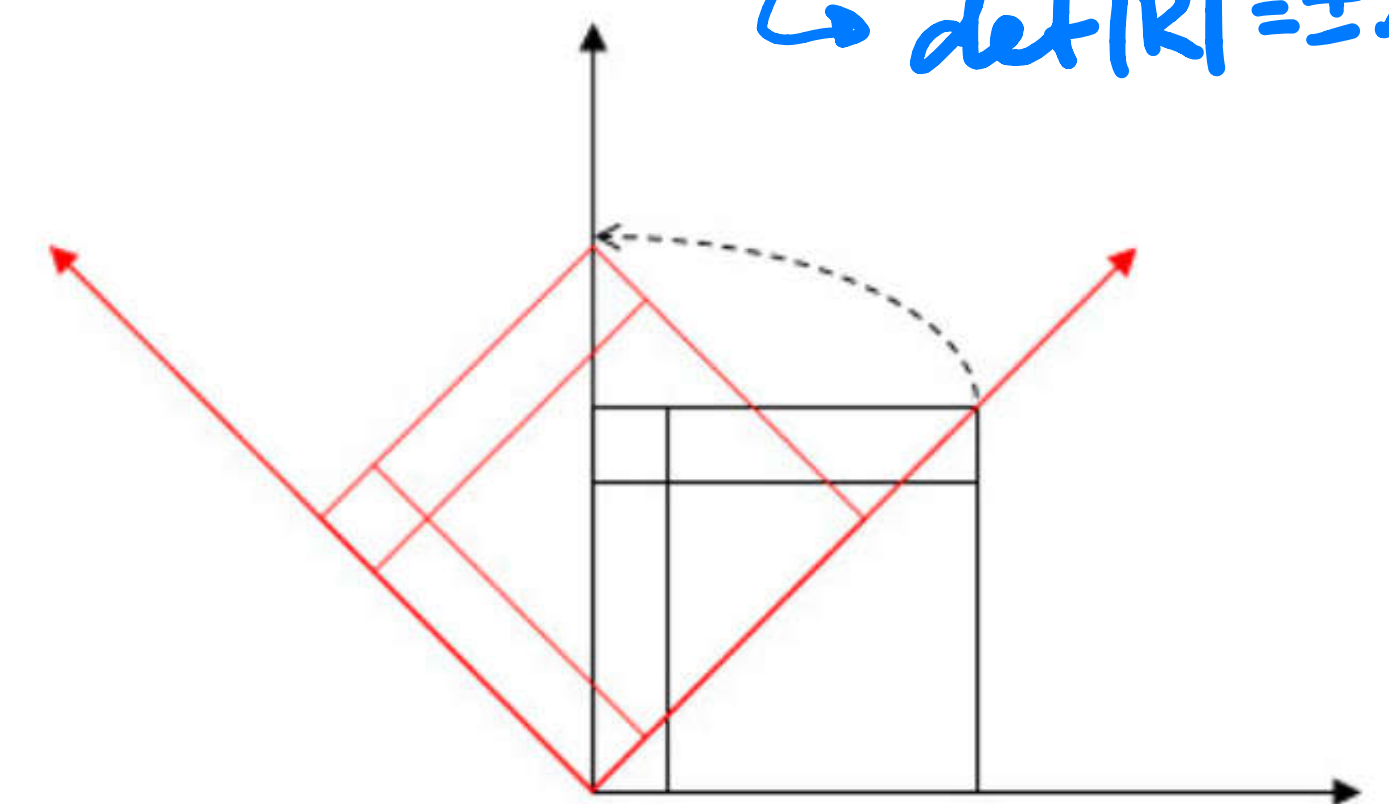
$$P' = P + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$



Skalierung (Spiegelung)

$$P' = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix} \cdot P$$

$$P \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$$

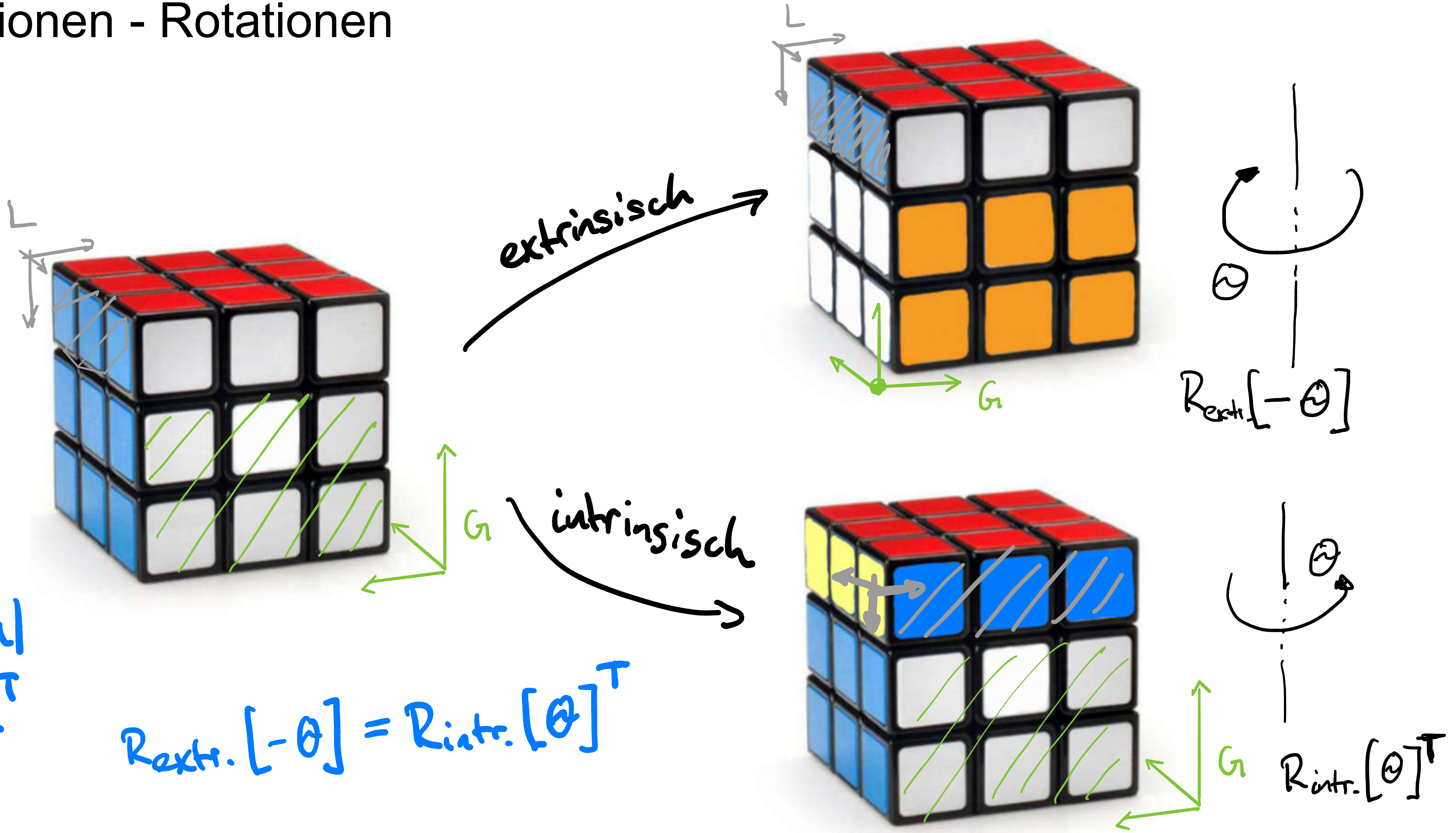


Rotation

$$P' = [{}^I R_*] P^*$$

$$* \rightarrow 1$$

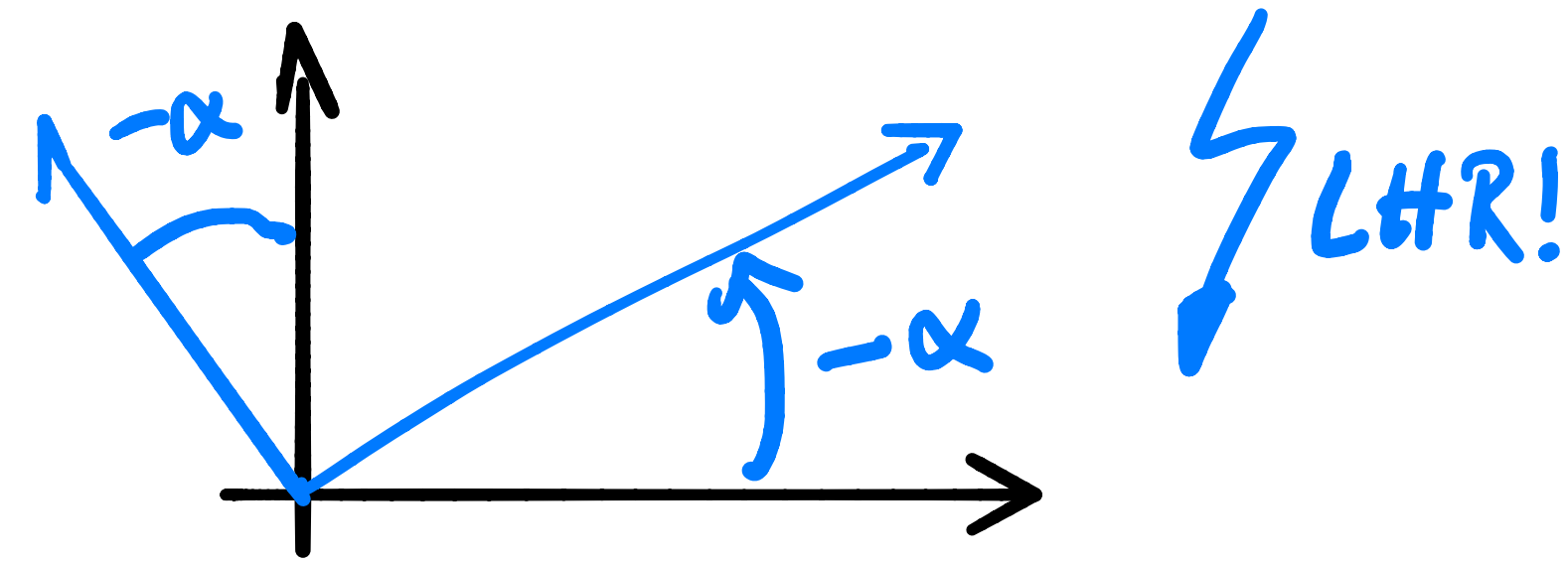
# Transformationen - Rotationen



orthogonal  
 $R^{-1} = R^T$

$R_{\text{extr.}}[-\theta] = R_{\text{intr.}}[\theta]^T$

# Koordinatentransformationen



## Euler- und Kardanwinkel

Elementarrotationen (negativer Drehsinn):

positives → RHR

LHR

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resultierende Rotationsmatrix der Kardansequenz ( $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ):

$$[{}^G\mathbf{R}_L] = [R_z][R_y][R_x] = zyx \neq xyz \text{ (aber } = xyz^{-1} \text{)}$$

↳  $xyz, yxz, yzx, \dots$

Resultierende Rotationsmatrix der Eulersequenz ( $\vec{z}, \vec{y}, \vec{z}$ ):

$$[{}^G\mathbf{R}_L] = [R_{z2}][R_y][R_{z1}]$$

Achtung Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ:  $A * B \neq B * A$



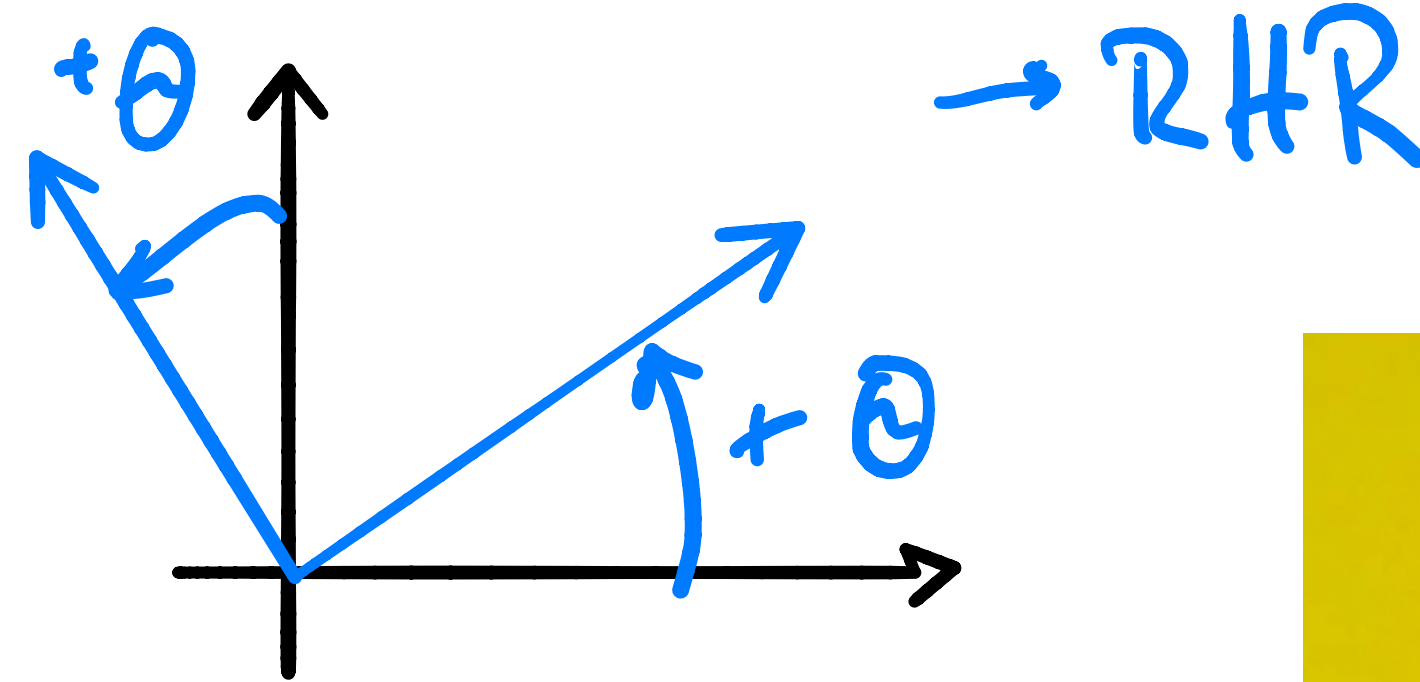
# Koordinatentransformationen – Real World/Wiki/Givens

A basic rotation (also called elemental rotation) is a rotation about one of the axes of a coordinate system. The following three basic rotation matrices rotate vectors by an angle  $\theta$  about the  $x$ -,  $y$ -, or  $z$ -axis, in three dimensions, using the **right-hand rule**—which codifies their alternating signs. (The same matrices can also represent a clockwise rotation of the axes.<sup>[nb 1]</sup>)

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

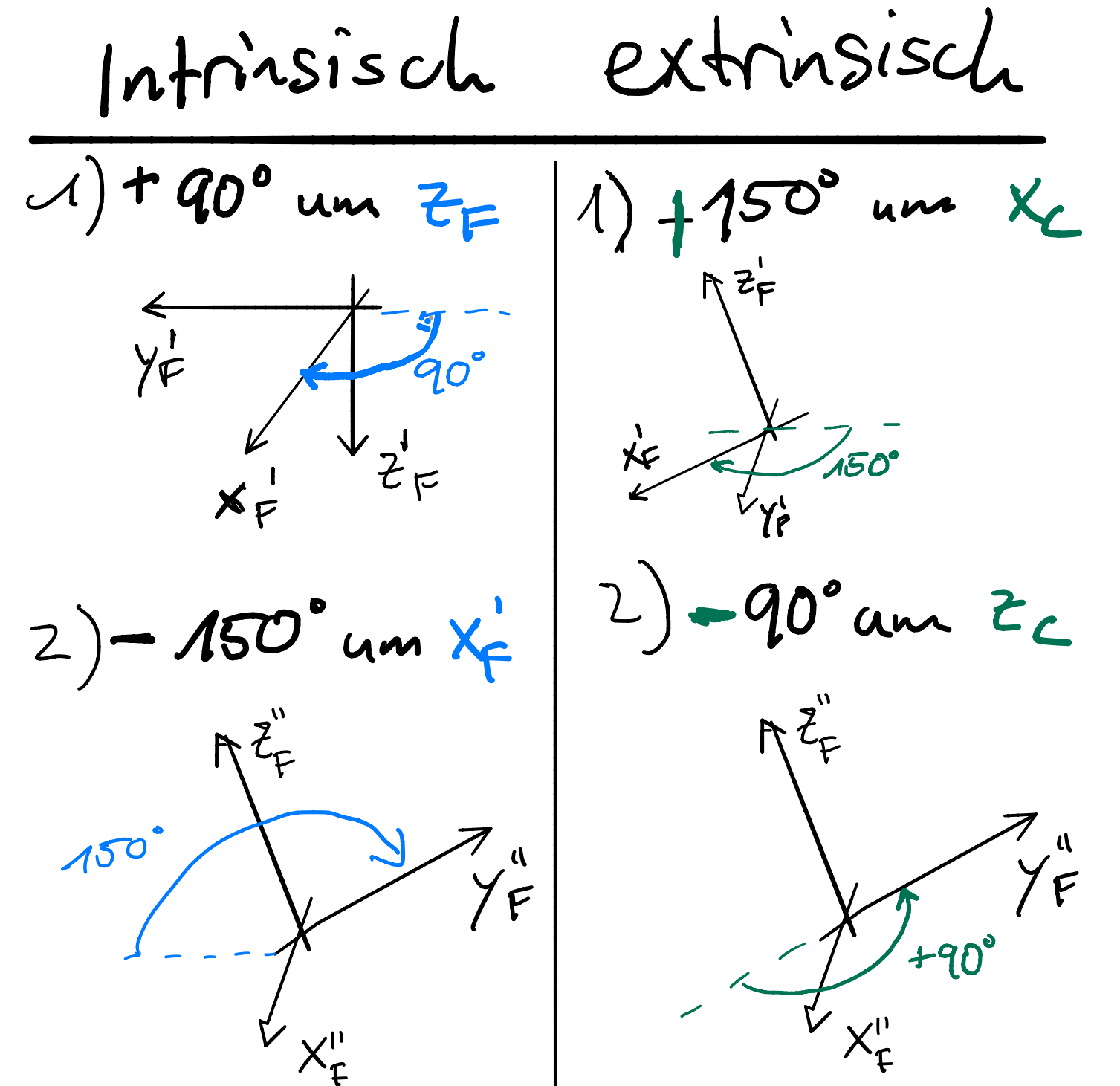
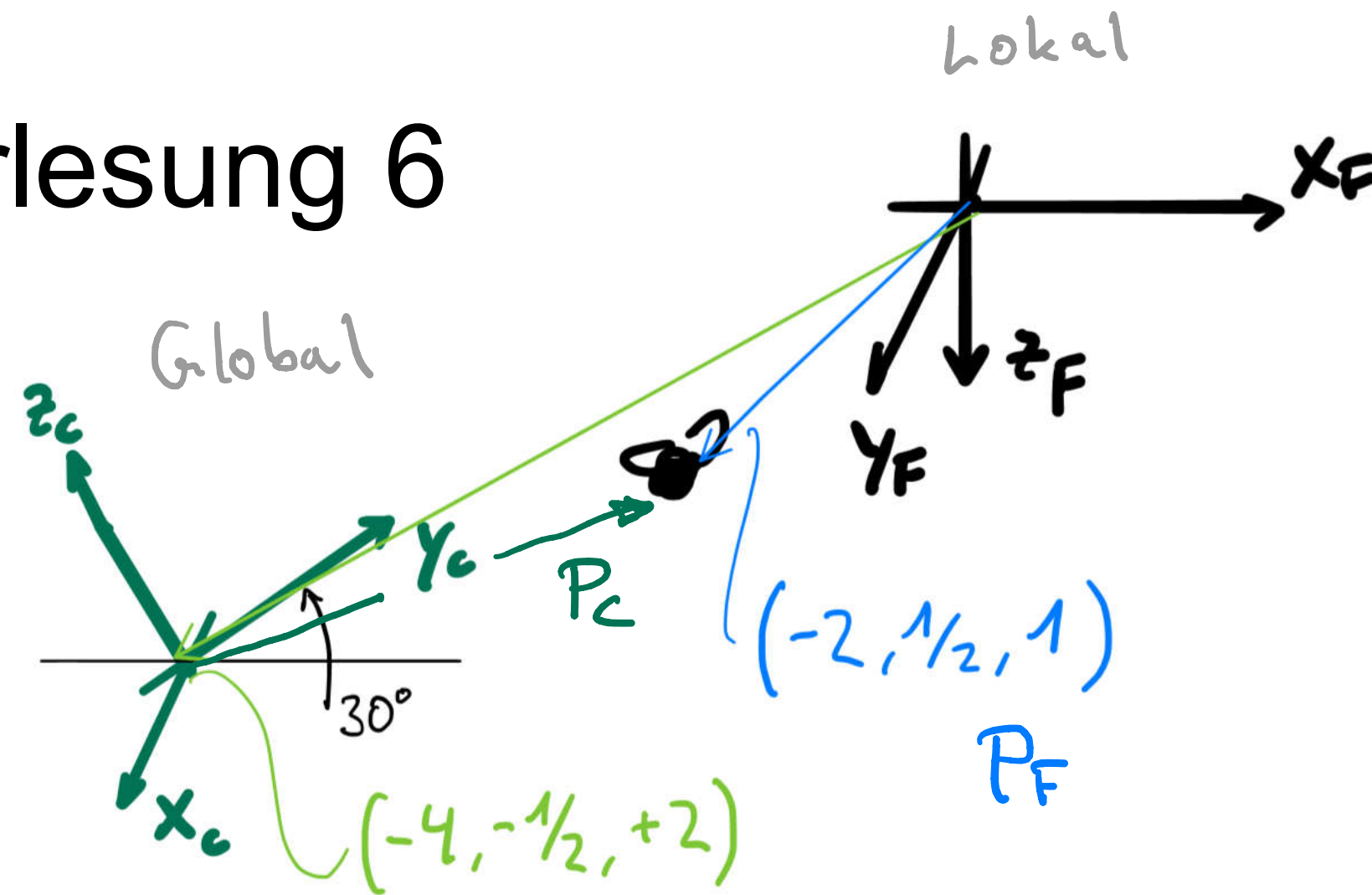
$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



[https://en.wikipedia.org/wiki/Davenport\\_chained\\_rotations](https://en.wikipedia.org/wiki/Davenport_chained_rotations)

# Übung VIII – Clicker Vorlesung 6

Eine Fledermaus ortet die Fliege in ihrem Koordinatensystem (KS) auf Position  $X_F = -2, Y_F = 0.5, Z_F = 1$  und den Kopf des Chamäleons auf  $X_C = -4, Y_C = -0.5, Z_C = 2$ .  
An welche Position muss das Chamäleon in seinem KS zielen um die Fliege zu erwischen?



Wie unterscheidet sich die intrinsische Rot. matrix?

Extrinsische:

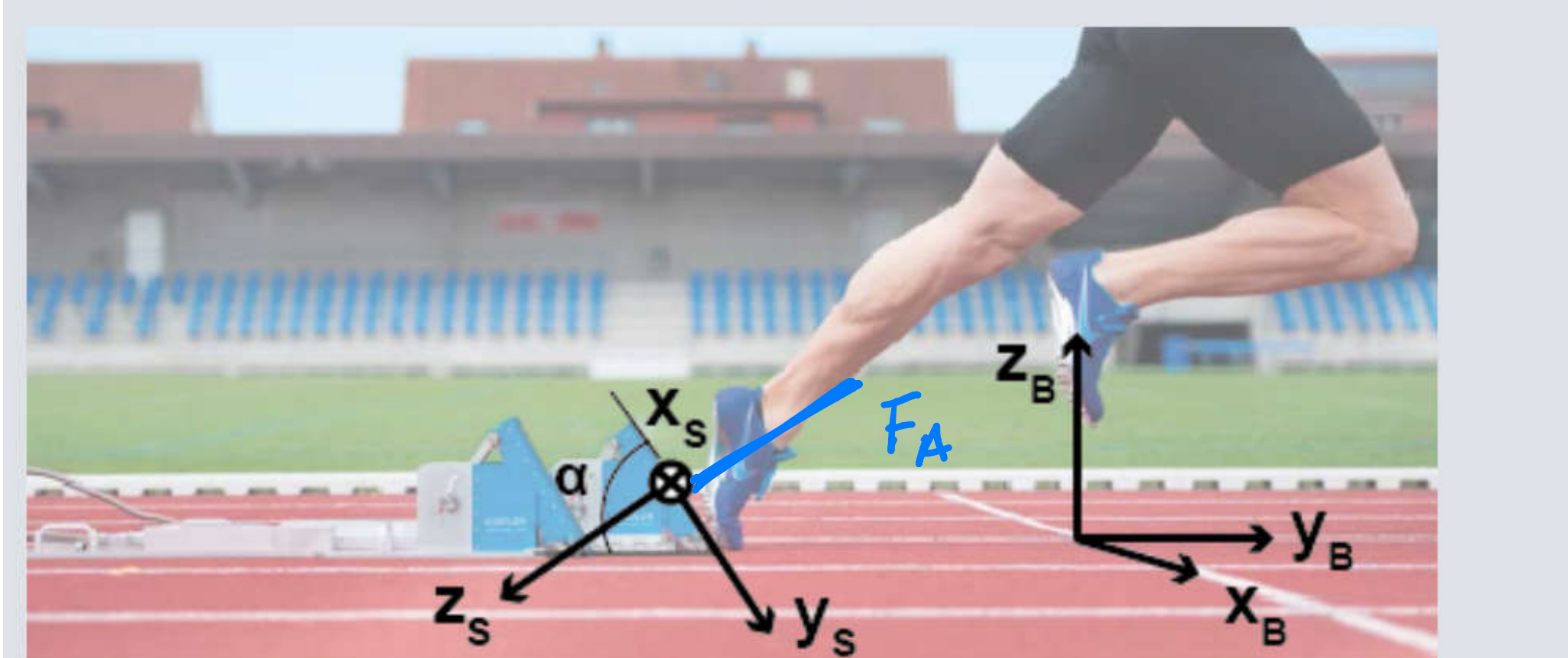
$$[R] = R_x(+150^\circ) R_z(-90^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(150^\circ) & -\sin(150^\circ) \\ 0 & \sin(150^\circ) & \cos(150^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) & 0 \\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P_C = [R] P_F + t_{F \rightarrow C} = [{}^C R_F] P_F - [{}^C R_F] t_{C \rightarrow F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -1/2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 + \sqrt{3} \\ -1 + \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$R: S \rightarrow B, \quad [{}^B R_S]$$

# Übung IX – Transformationen FS18



Der instrumentierte Startblock misst die Kräfte im Startblockkoordinatensystem

$$(x_S, y_S, z_S)$$

Der Anstellwinkel des Startblocks beträgt

$$\alpha = 60^\circ$$

Das Bahnkoordinatensystem

$$(x_B, y_B, z_B)$$

befindet sich auf der Startline. Beide Koordinatensysteme sind orthogonal und

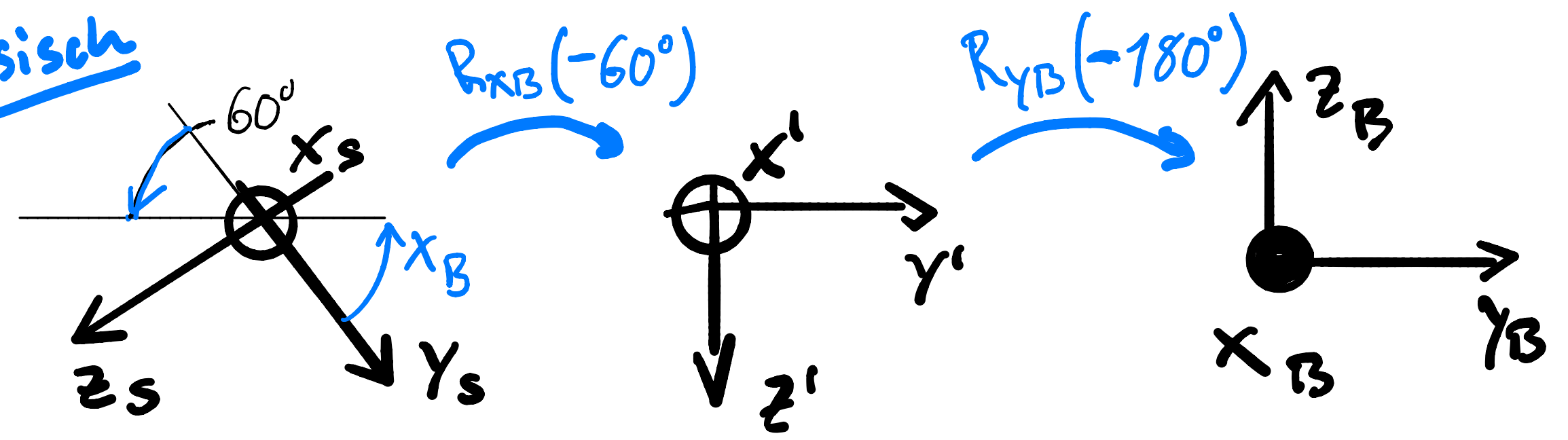
$$x_S$$

und

$$x_B$$

zeigen in entgegengesetzte Richtungen.

Extrinsisch



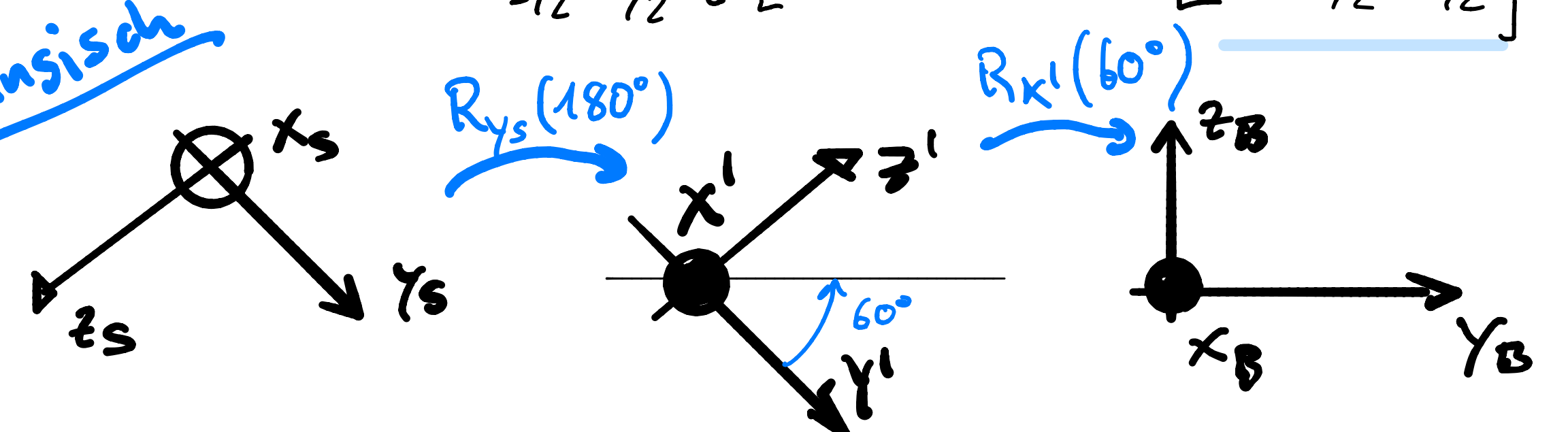
$$R_{x_B}(-60^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ 0 & \sin(-60^\circ) & \cos(60^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$R_{y_B}(-180^\circ) = \begin{bmatrix} \cos \pi & 0 & \sin \pi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \pi & 0 & \cos \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[{}^B R_S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

allg  
 $[{}^B R_S] = [{}^B R_S]^T$   
 extr.      intr.  
hier (speziell)  
 $[{}^B R_S] = [{}^B R_S]$   
 extr.      intr.

Intrinsisch



$$[{}^S R_B] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}^T$$

müssen am Ende

# Übung X - Matrixtransformationen

$M^{-1} = M^T$ ,  $\det |M| = \pm 1$

1)  $M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$  4)   
 =  $\underline{\underline{\Pi \lambda}}$  Skalierung

Spalten stehen nicht  $\perp$  (nicht lin. unabhängig)

7)  $M = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 5 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 6 \end{bmatrix}$    
 N/A  $\| \text{Spalte} \|_2 \stackrel{!}{=} 1$  für Rotation   
 $\sqrt{1^2 + (-7)^2 + (6)^2} \neq 1$

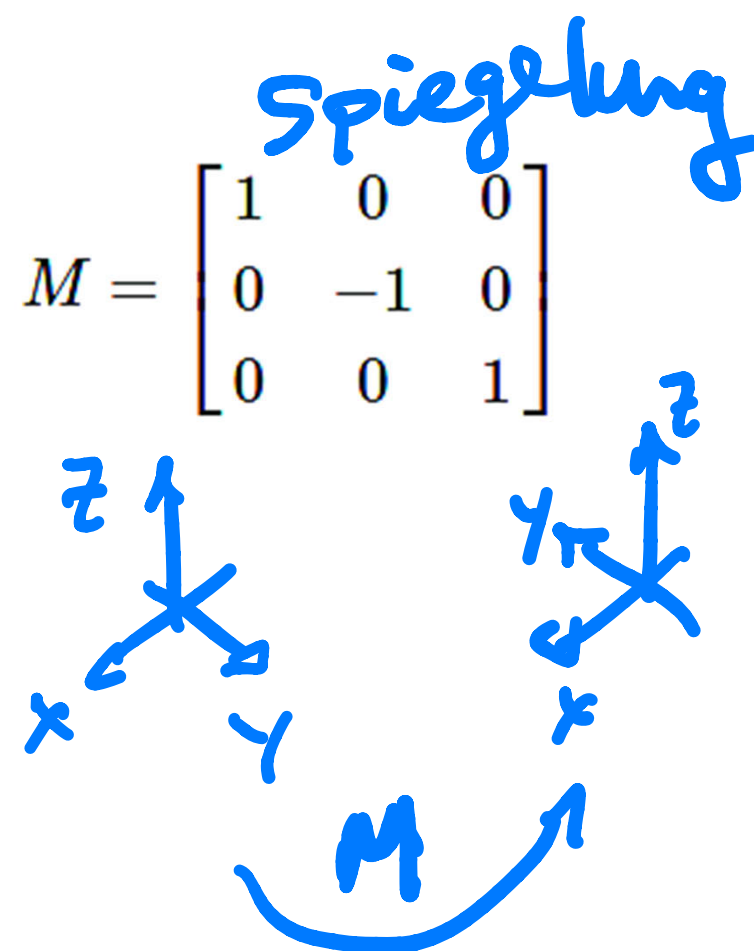
7)  $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$    
 Spiegelung

2)  $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$  5)   
 N/A

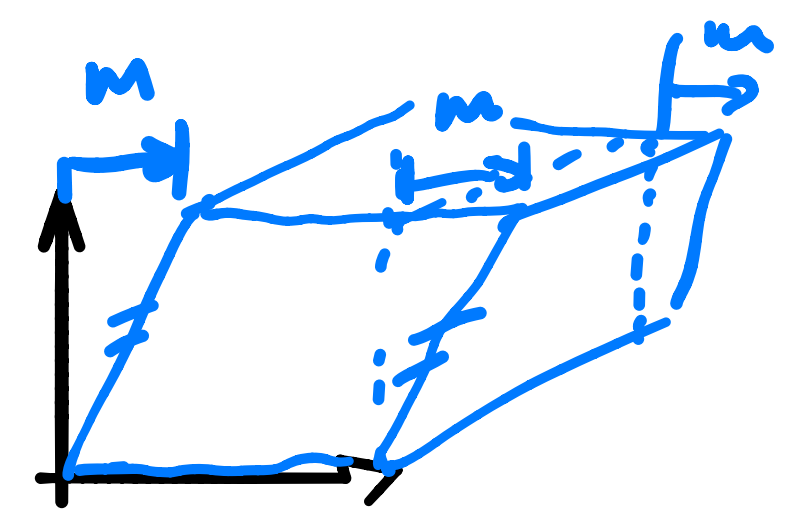
8)  $M = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$    
 Skalierung

8)  $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$    
 N/A

3)  $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  6)   
 Rotation  $R_y(-90^\circ)$



9)  $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$    
 Scherung   
 $M^{-1} \neq M^T$    
 $M^{-1} = -M^T \rightarrow$  "interne" translation



# Einschub:

## A Joint Coordinate System for the Clinical Description of Three-Dimensional Motions: Application to the Knee

<https://doi.org/10.1115/1.3138397>

Describe the motion of the knee joint

Purpose:

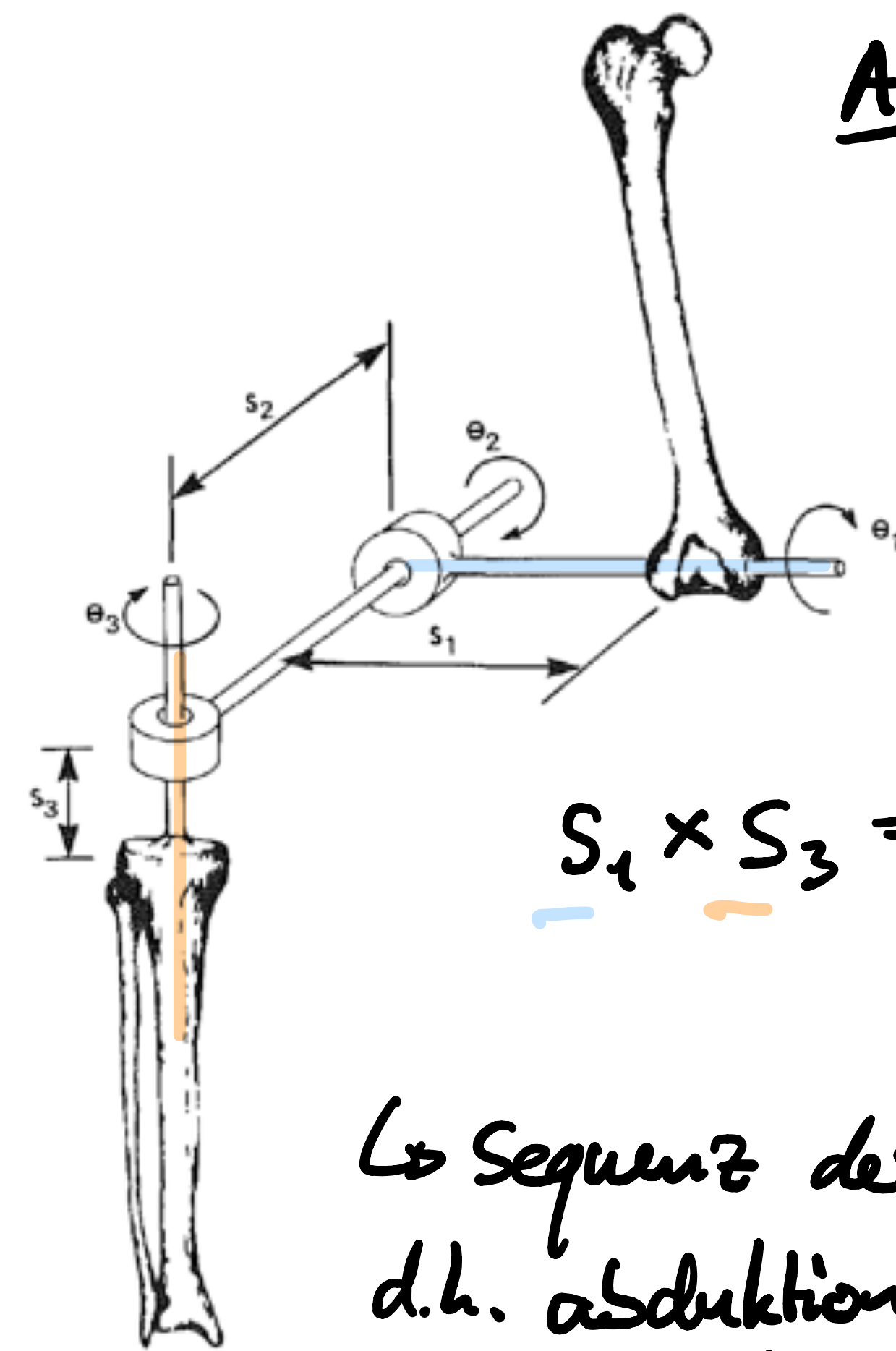
- ensure that all three rotations have functional meaning for the knee

How is it different than cardan/Euler rotations?

- NOT an orthogonal system
- Two segment-fixed axes and a FLOATING axis

Essentially, we must define the anatomical axes of interest from bony markers, the clinical axes of rotation, and the origin of the joint coordinate system for a complete analysis of motion

→ One of many ways to quantify motion of two rigid bodies



Allgemein  
 $AB \neq BA$

$$\underline{s_1} \times \underline{s_3} = s_2$$

↳ floating axis

↳ Sequenz der Rotationen egal  
d.h. abduction/flexion

flexion/abduction

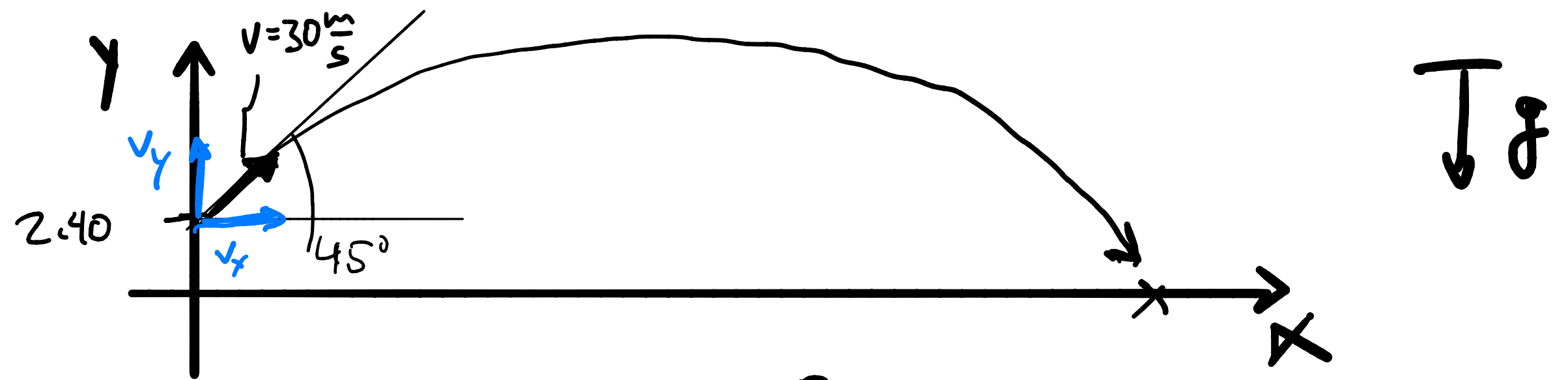
# Übung – Speerwurf (Serie 7.5)

Ein Athlet wirft seinen Speer, den wir als Massenpunkt betrachten, aus der Handhöhe von  $h = 2.40$  m mit einer Geschwindigkeit von  $v = 30$  m/s und einem Winkel von  $45^\circ$  ab ( $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>).

(a) Wie weit wirft der Athlet?

(b) Wie wird die Bahnkurve des Speeres in den kartesischen Koordinatensystemen beschrieben (Vektorielle Bahngleichung)?

(c) Der Trainer des Athleten steht am Spielfeldrand und betrachtet den Wurf aus einem Winkel von  $60^\circ$  (Drehung in y-Richtung).  
 1. Wie lautet die gesuchte Rotationsmatrix?  
 2. Wie sieht die Bahnkurve aus Sicht des Trainers aus?



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} v$$

a) ges: x

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

$$= v \cos(45^\circ) t$$

$$y = \frac{1}{2} (-g) t^2 + v_0 t + y_0$$

$$= -\frac{1}{2} g t^2 + v \sin(45^\circ) t + h = 0$$

$$t(y=0) = \frac{+\frac{\sqrt{2}}{2} 30 \mp \sqrt{\frac{1}{2} 30^2 + 2gh}}{+g} = 4.435 \text{ s}$$

$$x = 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4.435 = \underline{\underline{94.1 \text{ m}}}$$

b)  $\underline{r} = \underline{v} \cdot t$

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos(45^\circ) t \\ -\frac{1}{2} g t^2 + v \sin(45^\circ) t + h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

c) 1.  $R_y(+60^\circ) = \begin{bmatrix} \cos(60^\circ) & 0 & -\sin(60^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(60^\circ) & 0 & \cos(60^\circ) \end{bmatrix}$

2.  $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \frac{\sqrt{2}}{2} t \\ -\frac{1}{2} g t^2 + v \frac{\sqrt{2}}{2} t + h \\ 0 \end{pmatrix}$

$t(s) = \frac{-v_0 \pm \sqrt{2ay - 2ay_0 + v_0^2}}{a}$

Speer am Boden

# Kinematische Kette

### Kinematik

$$\omega = 2\pi f \quad f = 1/T \quad v_T = \frac{v}{r} = r\omega$$

$$a_{zp} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

s, v, a und  $\theta, \omega, \alpha$ : Konstante Linearbeschleunigung oder Winkelbeschleunigung

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

$$s = s_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{2as - 2as_0 + v_0^2}}{a}$$

Translation + Rotation um eine fixe Achse A

$$\mathbf{s}_P(t) = \mathbf{s}_A(t) + r_{AP}\boldsymbol{\omega}(t)$$

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_A(t) + r_{AP}\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}_r(t)$$

$$\mathbf{a}_P(t) = \mathbf{a}_A(t) + r_{AP}\boldsymbol{\alpha}(t) \times \mathbf{e}_r(t) - r_{AP}\boldsymbol{\omega}(t)^2 \mathbf{e}_r(t)$$

Gauss'sche Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f^2 = \left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x}\right)_{|x=x_0, y=y_0, \dots}^2 \Delta x^2 +$$

$$\left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial y}\right)_{|x=x_0, y=y_0, \dots}^2 \Delta y^2 +$$

$$\left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial z}\right)_{|x=x_0, y=y_0, \dots}^2 \Delta z^2 + \dots$$

### Kinetik

$$\mathbf{P} = M_{sp}\mathbf{v}_{sp} \quad \mathbf{L} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Schwerpunkt:  $\mathbf{R}_{sp} = \frac{\sum m_a \mathbf{r}_a}{\sum m_a}$

Trägheitsmoment:  $\mathbf{J}_S = \sum m_i \mathbf{r}_{i,S}^2$

Satz von Steiner:  $J_A = J_{SP} + m\mathbf{d}_A^2$

$$E_{kin} = 1/2m\mathbf{v}^2 + 1/2\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}^2$$

$$E_{pot} = - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Reibungskraft:  $F_R = -\mu F_n = -\mu \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n$

Federkraft:  $F_F = -k\Delta x$

### Stöße

Gerade, zentral, teilelastisch

$$v_1' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 (v_1 - v_2) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 (v_2 - v_1) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta U = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 (1 - C_R^2)$$

$$C = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} \quad \text{mit} \quad 0 \leq C \leq 1$$

### Koordinatensysteme

Polarkoordinaten (r,  $\theta$ )

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \omega \mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\omega \mathbf{e}_r$$

Zylindrische Koordinaten (r,  $\theta$ , z)

$$\mathbf{s}(t) = r(t)\mathbf{e}_r(\theta(t)) + z(t)\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{v} = \dot{s} \mathbf{e}_r + r\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{z} \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r) \mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta} r) \mathbf{e}_\theta + \ddot{z} \mathbf{e}_z$$

Affine Transformation:  $\mathbf{x}_C = [{}^C A_L] \mathbf{x}_L + \mathbf{t}_{L \rightarrow C}$

Elementarrotationen (negativer Drehsinn)

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Kinematische Kette

Freiheitsgrade in 3D:  $M = 6n - \sum_{i=1}^j (6 - f_j)$

Jacobimatrix (z.B. für  $x_1, x_2, x_3$ ):

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Zweikörperkette

$$X_P = l_1 \cos \alpha_1$$

$$Y_P = l_1 \sin \alpha_1$$

$$X_Q = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$Y_Q = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$

# Kinematische Kette

↳ mehrere starre Körper  $i_{1:j}$

#Gl.  $n$   
 $n$  DoF

→ Freiheitsgrade in 3D:  $M = 6n - \sum_{i=1}^j (6 - f_j)$

Jacobimatrix (z.B. für  $x_1, x_2, x_3$ ):

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Zwangsbedingung

↗ zwischen ↕ wechsell

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{J}_Q \cdot \dot{\alpha}$$

$$\mathbf{v}_Q = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \alpha_1 - l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & -l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \\ l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{bmatrix}$$

## Zweikörperkette

$$X_P = l_1 \cos \alpha_1$$

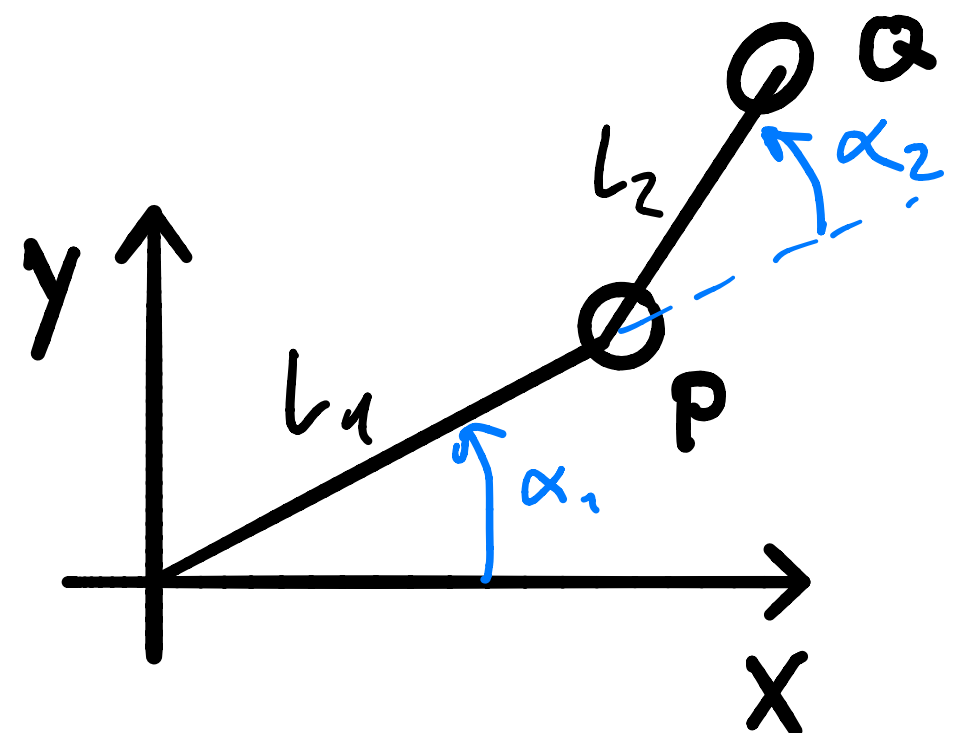
$$Y_P = l_1 \sin \alpha_1$$

$$X_Q = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$Y_Q = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\mathbf{a}_Q = \frac{d\mathbf{J}_Q}{dt} \dot{\alpha} + \mathbf{J}_Q \ddot{\alpha}$$

$$[\mathbf{j}]_Q = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 - l_2 (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & -l_2 (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \\ -l_1 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 - l_2 (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & -l_2 (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix}$$





# Beispiel Jacobi (Relevanz?)

Consider the mechanical system depicted in Figure 2. Let the vector of (minimal) generalized coordinates be  $\mathbf{q} = [\alpha \ \beta]^T$ . Calculate the generalized force vector  $\mathbf{Q}_2$  associated with the force  $\mathbf{F}_2$ .

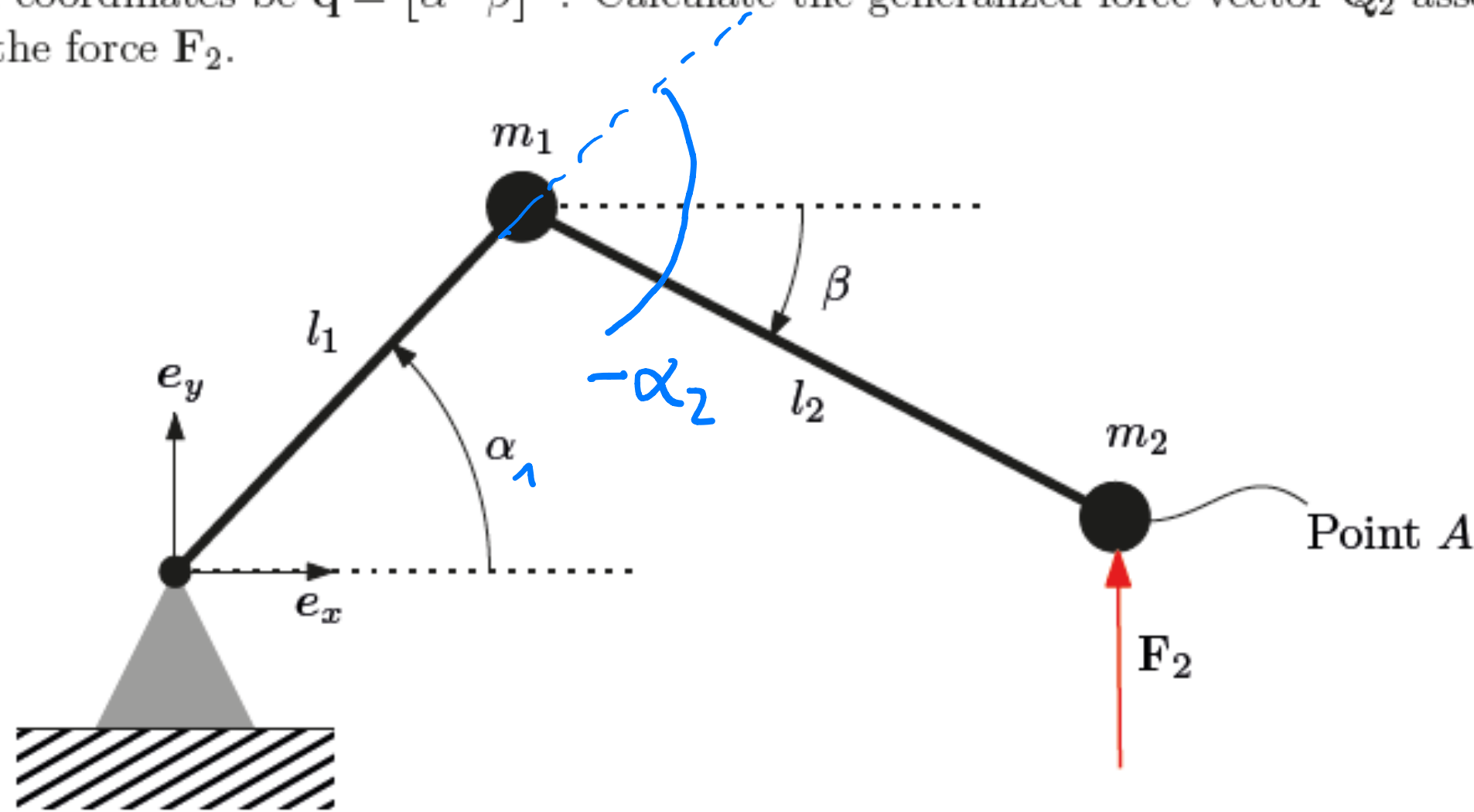


Figure 2: Sketch of the system.

**Solution.** The velocity of point  $A$  can be written as:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{J}_A \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\nu}_A.$$

Therefore, one way to obtain the Jacobian is to compute the velocity of point  $A$  as a function of the generalized velocities and read out the matrix. First, we compute the position vector as

$$\mathbf{r}_{OA} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha) + l_2 \cos(\beta) \\ l_1 \sin(\alpha) - l_2 \sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix},$$

the velocity is then given by

$$\mathbf{v}_A = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{OA}) = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\alpha} \sin(\alpha) - l_2 \dot{\beta} \sin(\beta) \\ l_1 \dot{\alpha} \cos(\alpha) - l_2 \dot{\beta} \cos(\beta) \\ 0 \end{bmatrix},$$

which can be rewritten as a matrix multiplication in the following way:

$$\mathbf{v}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha) & -l_2 \sin(\beta) \\ l_1 \cos(\alpha) & -l_2 \cos(\beta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\nu}_A}.$$

This formulation allows us to read out the required quantities directly.

The generalized force  $\mathbf{Q}_2$  is then given by

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{J}_A^T \cdot \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha) & l_1 \cos(\alpha) & 0 \\ -l_2 \sin(\beta) & -l_2 \cos(\beta) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 l_1 \cos(\alpha) \\ -F_2 l_2 \cos(\beta) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

*Remark.* If we were to compute the generalized force corresponding to a torque, we would apply the same procedure with the angular velocity  $\boldsymbol{\omega}$  of the body.

# Aufgabe X – Kinematische Kette

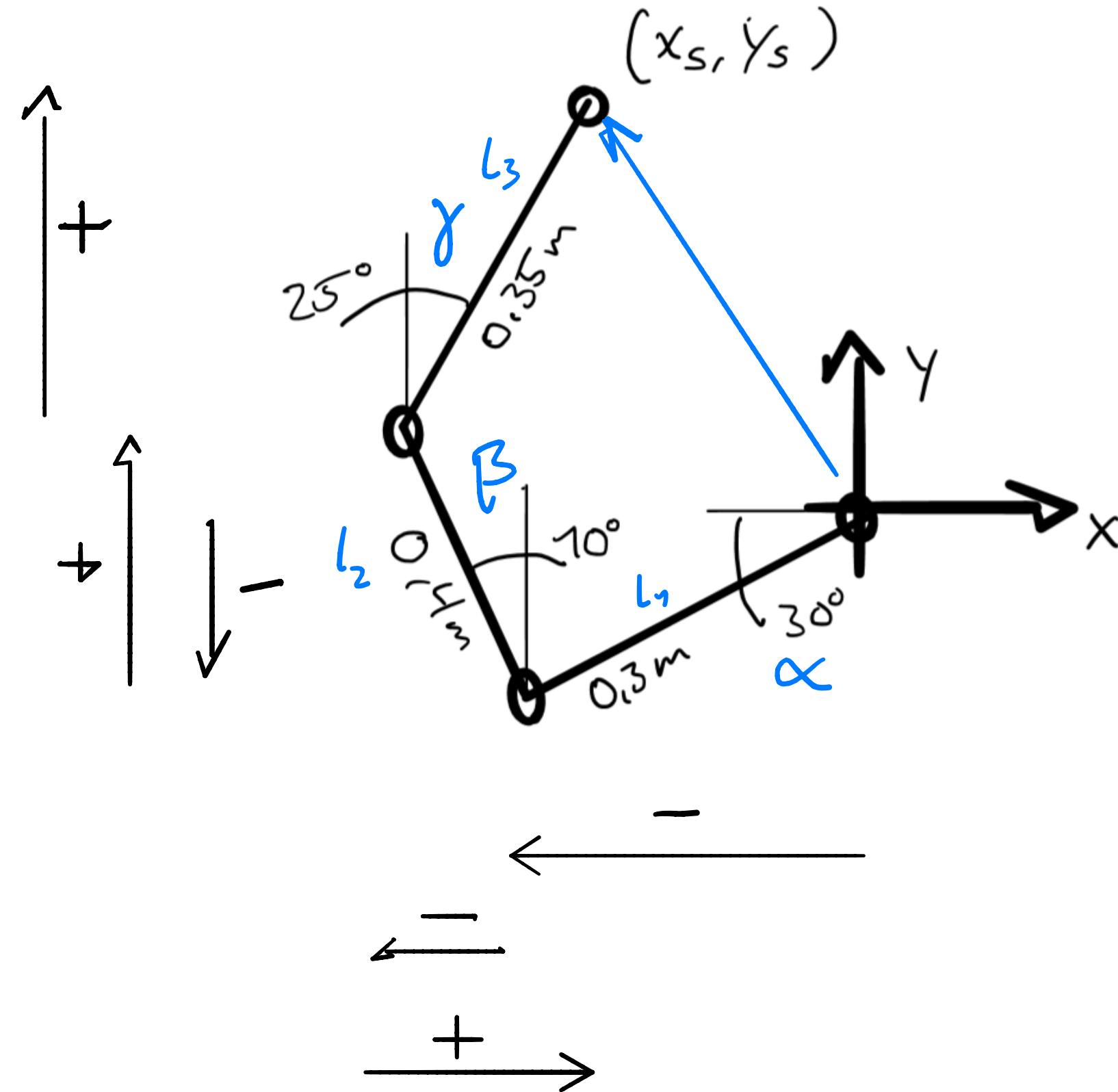
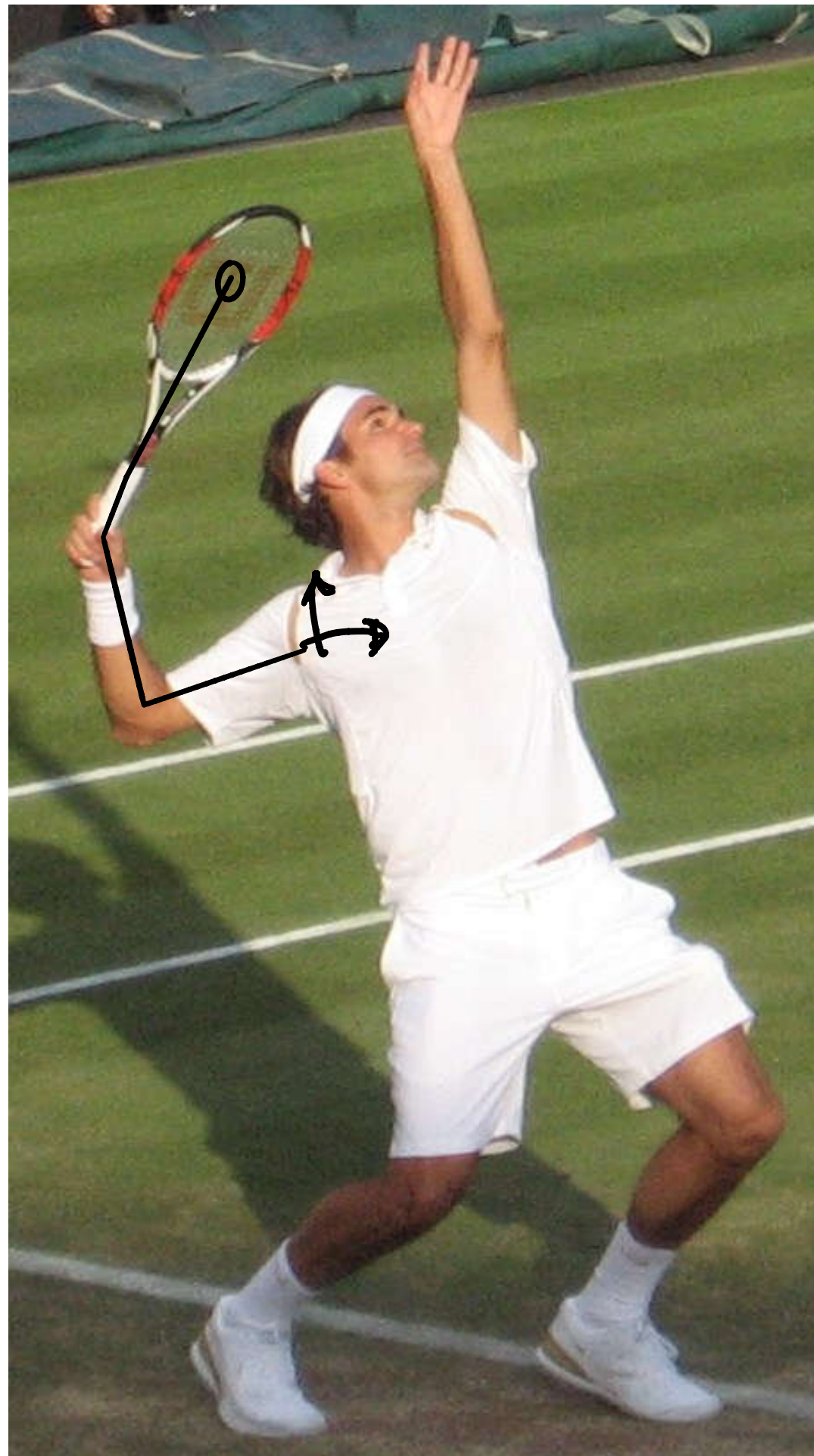
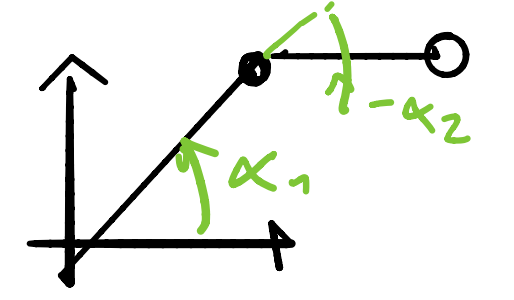
ges:  $x_s, y_s$

$$X_P = l_1 \cos \alpha_1$$

$$Y_P = l_1 \sin \alpha_1$$

$$X_Q = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$Y_Q = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$



$$\begin{aligned} x_s &= -l_1 \cos(\alpha) - l_2 \sin(\beta) \\ &\quad + l_3 \sin(\gamma) \\ &= -\cos(30^\circ) 0.3 - \sin(10^\circ) 0.4 + \sin(25^\circ) 0.35 \\ &= \underline{\underline{-0.18 \text{ m}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_s &= -\sin(\alpha) l_1 + \cos(\beta) l_2 + \cos(\gamma) l_3 \\ &= -\sin(30^\circ) 0.3 + \cos(10^\circ) 0.4 + \cos(25^\circ) 0.35 \\ &= \underline{\underline{0.56 \text{ m}}} \end{aligned}$$

Geschw:  $\dot{x}_s (\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}, \gamma, \dot{\gamma})$   
 $\dot{y}_s (\text{---} \text{---} \text{---})$

# Kinetik

## Grundlagen

### Kinematik

$$\omega = 2\pi f \quad f = 1/T \quad v_T = \frac{v}{r} = r\omega$$

$$a_{zp} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

s, v, a und  $\theta, \omega, \alpha$ : Konstante Linearbeschleunigung oder Winkelbeschleunigung

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

$$s = s_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{2as - 2as_0 + v_0^2}}{a}$$

Translation + Rotation um eine fixe Achse A

$$\mathbf{s}_P(t) = \mathbf{s}_A(t) + r_{AP}\mathbf{e}_r(t)$$

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_A(t) + r_{AP}\omega(t)\mathbf{e}_\phi(t)$$

$$\mathbf{a}_P(t) = \mathbf{a}_A(t) + r_{AP}\alpha(t)\mathbf{e}_\phi(t) - r_{AP}\omega(t)^2\mathbf{e}_r(0)$$

Gauss'sche Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f^2 = \left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x}\right)_{|x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta x)^2 +$$

$$\left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial y}\right)_{|x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta y)^2 +$$

$$\left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial z}\right)_{|x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta z)^2 + \dots$$

### Stöße

Gerade, zentral, teilelastisch

$$v'_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 (v_1 - v_2) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 (v_2 - v_1) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta U = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 (1 - C_R^2)$$

$$C = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} \quad \text{mit} \quad 0 \leq C \leq 1$$

### Koordinatensysteme

Polarkoordinaten (r,  $\theta$ )

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \omega \mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\omega \mathbf{e}_r$$

Zylindrische Koordinaten (r,  $\theta$ , z)

$$\mathbf{s}(t) = r(t)\mathbf{e}_r(\theta(t)) + z(t)\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{v} = \dot{s} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta}r)\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z$$

Affine Transformation:  $\mathbf{x}_C = [{}^C A_L] \mathbf{x}_L + \mathbf{t}_{L \rightarrow C}$

Elementarrotationen (negativer Drehsinn)

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Kinetik

$$\mathbf{P} = M_{sp} \mathbf{v}_{sp} \quad \mathbf{L} = \mathbf{J}\omega = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Schwerpunkt:  $\mathbf{R}_{sp} = \frac{\sum m_a \mathbf{r}_a}{\sum m_a}$

Trägheitsmoment:  $\mathbf{J}_S = \sum m_i \mathbf{r}_{i,S}^2$

Satz von Steiner:  $J_A = J_{SP} + m\mathbf{d}_A^2$

$$E_{kin} = 1/2 m \mathbf{v}^2 + 1/2 \mathbf{J}\omega^2$$

$$E_{pot} = - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Reibungskraft:  $F_R = -\mu F_n = -\mu \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n$

Federkraft:  $F_F = -k \Delta x$

### Kinematische Kette

Freiheitsgrade in 3D:  $M = 6n - \sum_{i=1}^j (6 - f_j)$

Jacobimatrix (z.B. für  $x_1, x_2, x_3$ ):

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Zweikörperkette

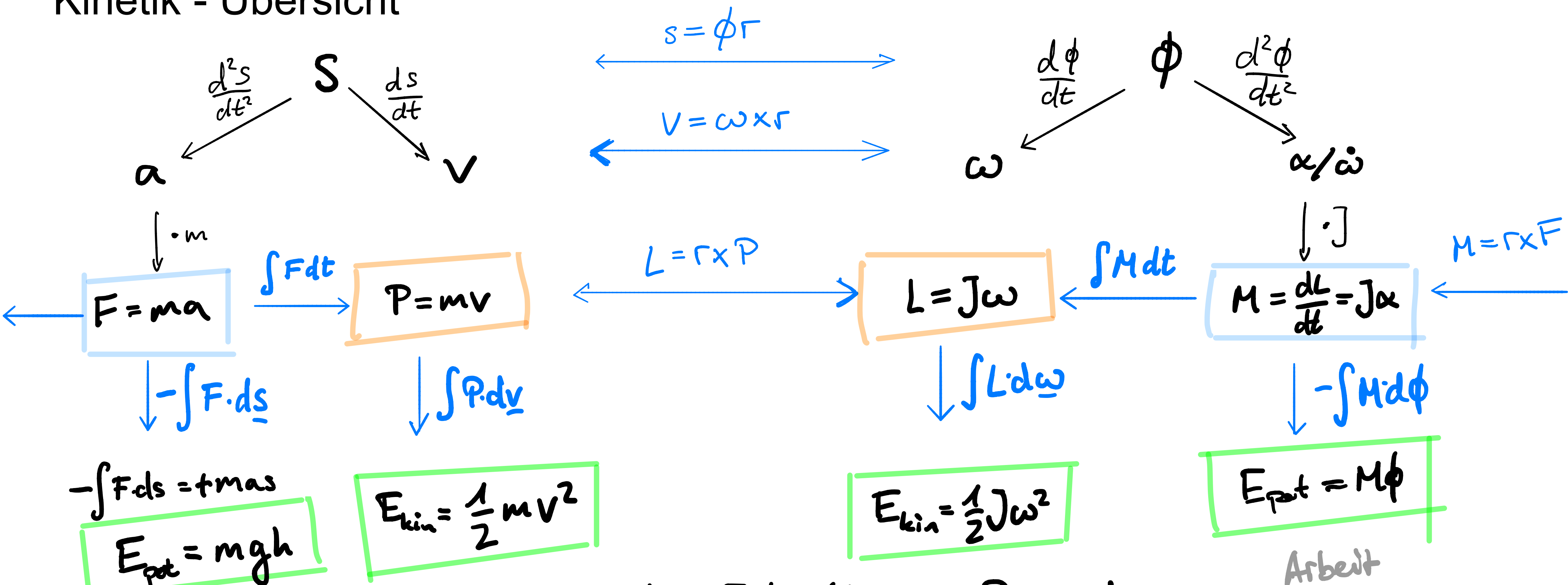
$$X_P = l_1 \cos \alpha_1$$

$$Y_P = l_1 \sin \alpha_1$$

$$X_Q = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$Y_Q = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$

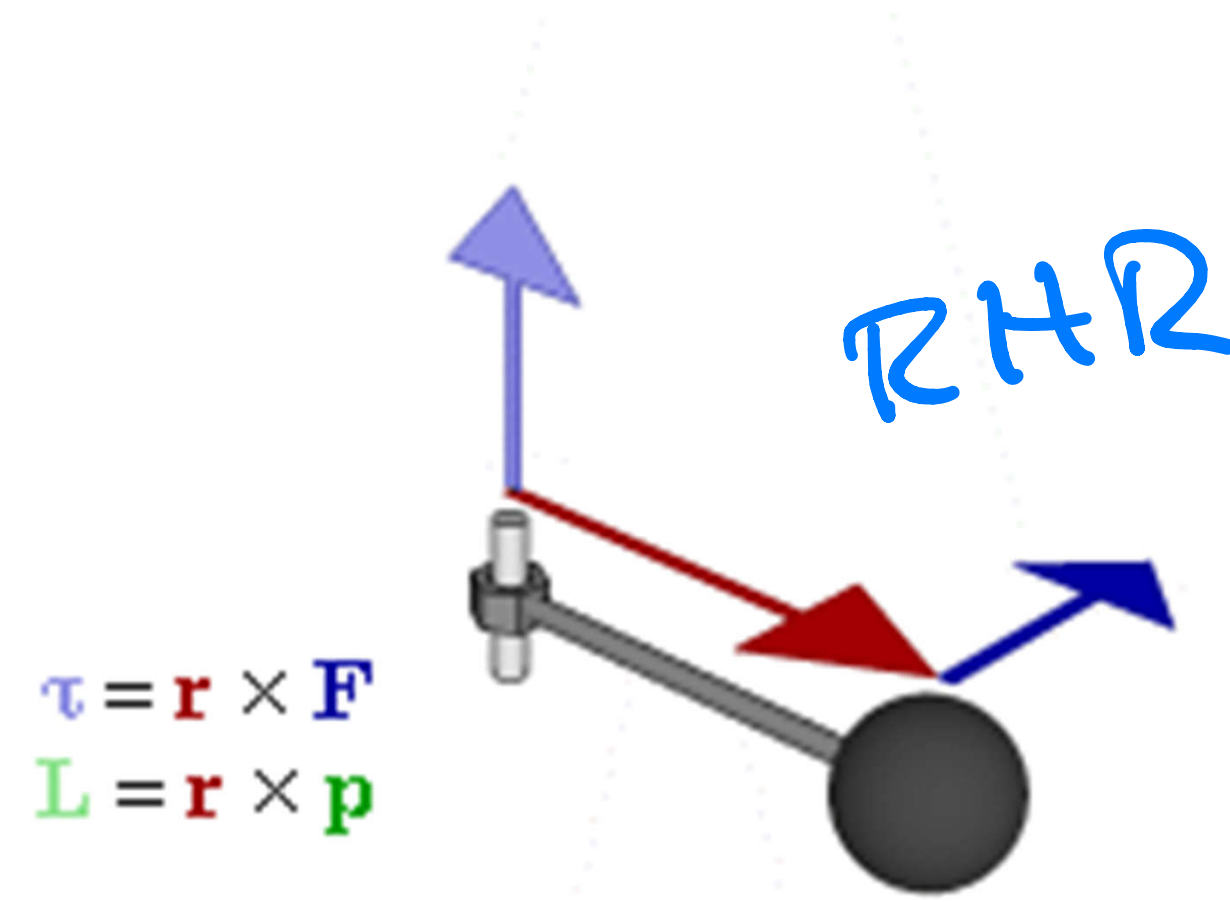
# Kinetik - Übersicht



Newton-Euler / Inverse Dynamics  
 Impulserhaltung  
 Lagrange / Energiegleichung

# Kinetik – Formelblatt

$$\mathbf{P} = M_{sp} \mathbf{v}_{sp} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{L} = \mathbf{J}\omega = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$
$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$



[https://en.wikipedia.org/wiki/Angular\\_momentum](https://en.wikipedia.org/wiki/Angular_momentum)

# Kinetik – Formelblatt

Schwerpunkt:  $\mathbf{R}_{sp} = \frac{\sum_a m_a \mathbf{r}_a}{\sum_a m_a}$

Abstand

Trägheitsmoment:  $\mathbf{J}_S = \sum_i m_i \mathbf{r}_{i,S}^2$

Satz von Steiner:  $J_A = J_{SP} + m d_A^2$

$E_{kin} = 1/2 m v^2 + 1/2 J \omega^2$

Ebens Erot

$E_{pot} = - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$

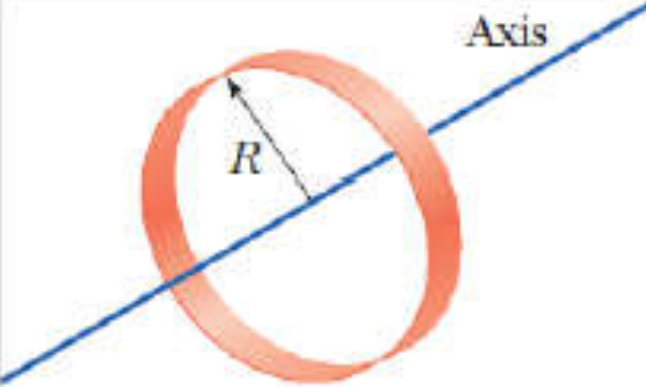
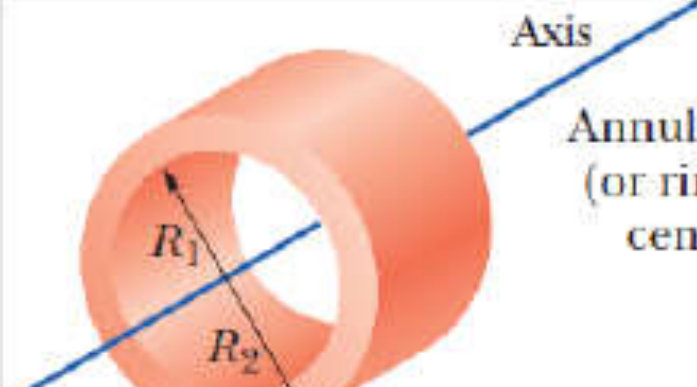
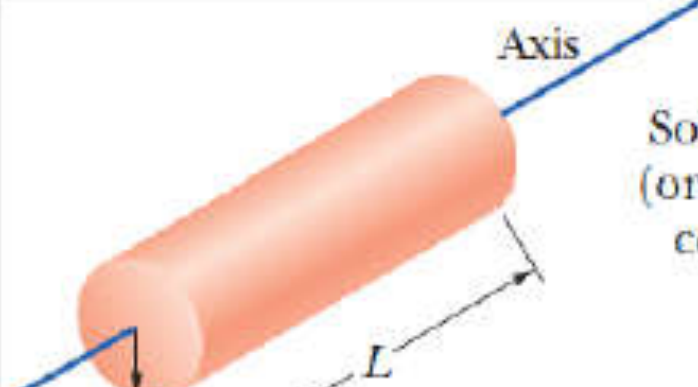
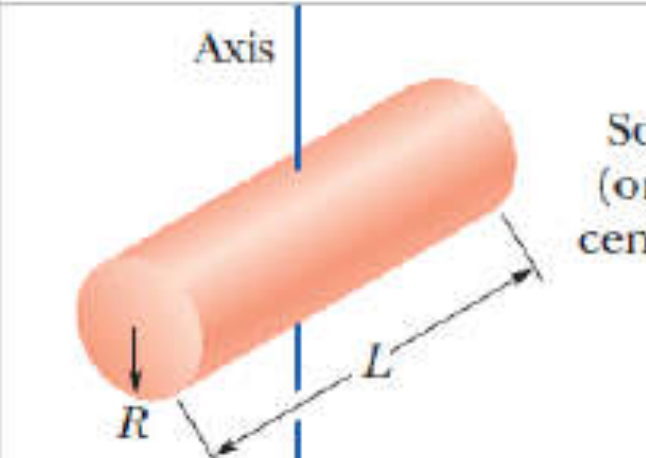
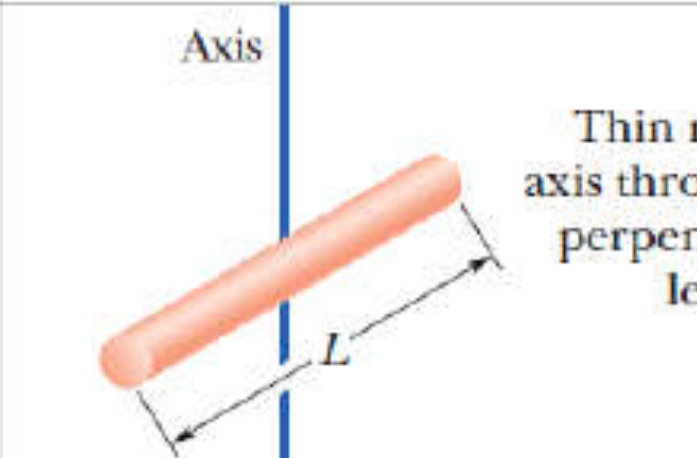
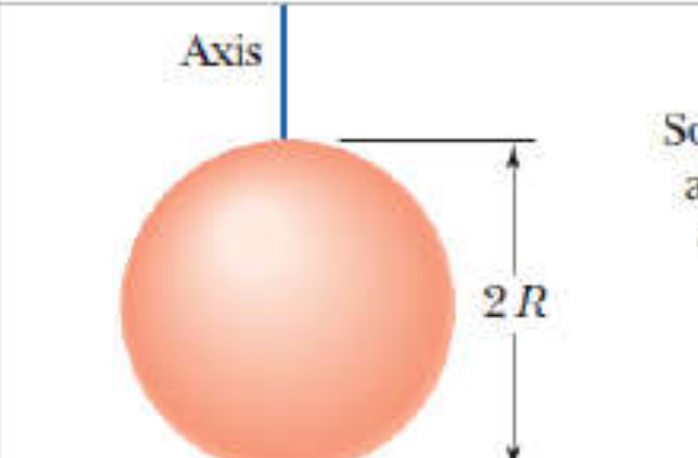
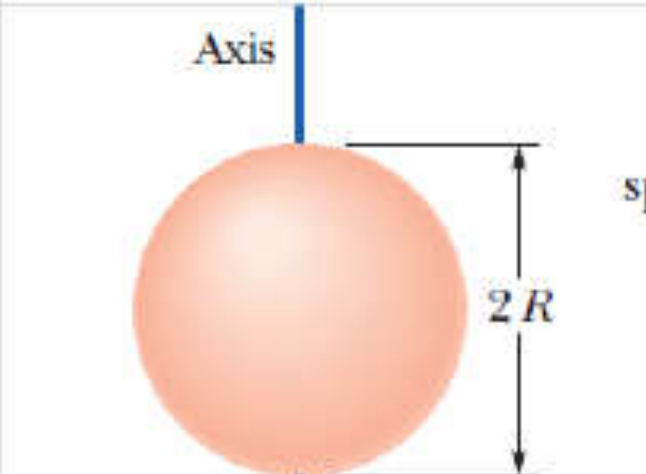
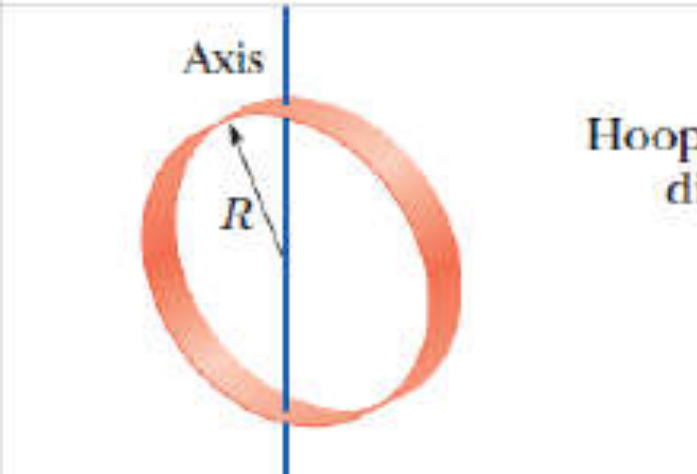
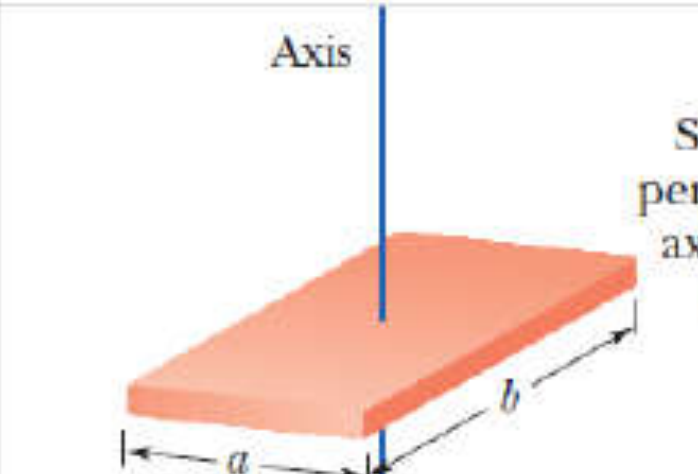
$F \perp ds \rightarrow E_{pot} = 0$

~ Gleitreibung

Reibungskraft:  $F_R = -\mu F_n = -\mu \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n$

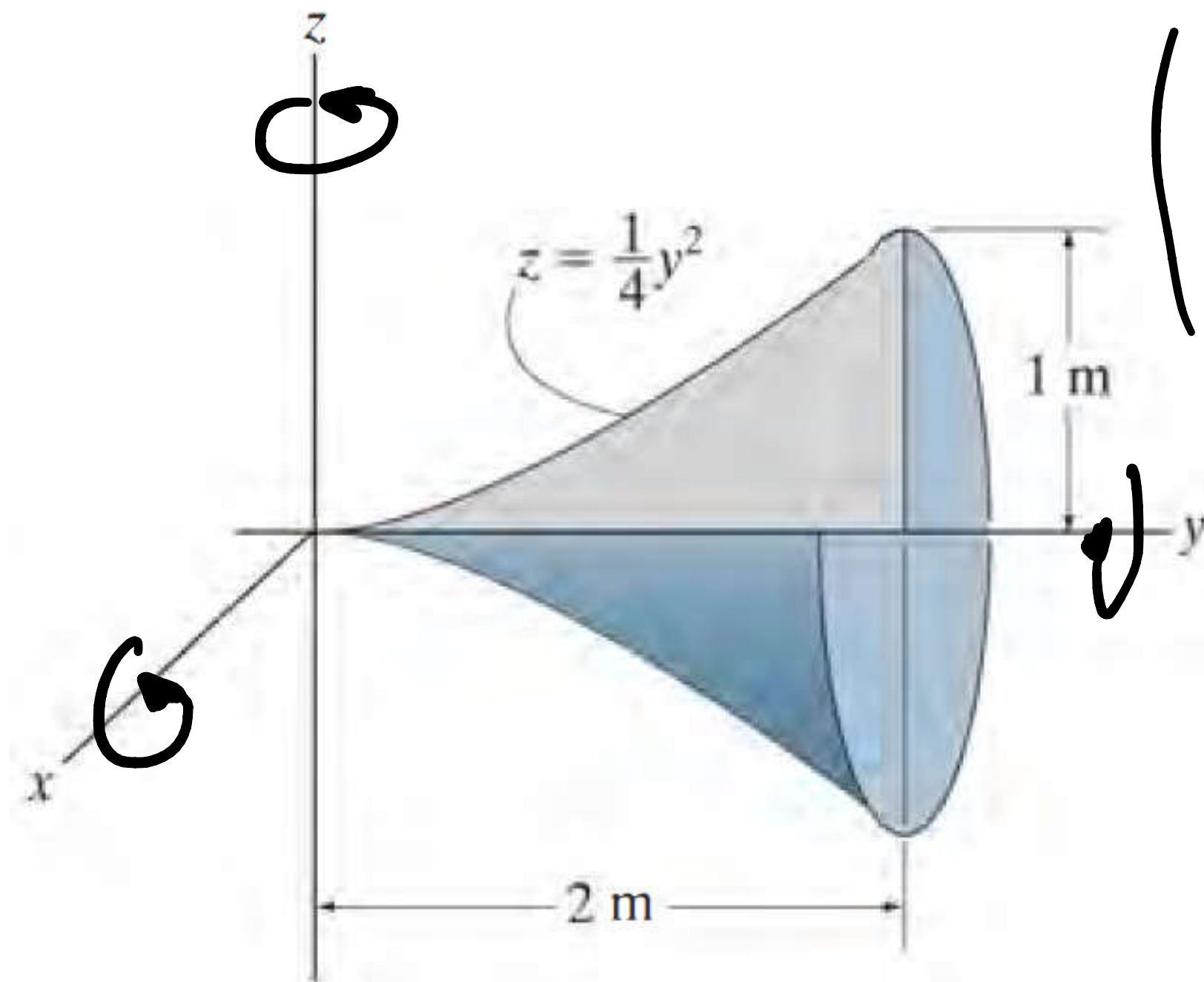
Federkraft:  $F_F = -k \Delta x$

# Trägheitsmomente

 <p>Hoop about central axis</p> <p><math>J = mR^2</math></p> <p>(a)</p>	 <p>Annular cylinder (or ring) about central axis</p> <p><math>I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)</math></p> <p>(b)</p>	 <p>Solid cylinder (or disk) about central axis</p> <p><math>I = \frac{1}{2}MR^2</math></p> <p>(c)</p>
 <p>Solid cylinder (or disk) about central diameter</p> <p><math>I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2</math></p> <p>(d)</p>	 <p>Thin rod about axis through center perpendicular to length</p> <p><math>I = \frac{1}{12}ML^2</math></p> <p>(e)</p>	 <p>Solid sphere about any diameter</p> <p><math>I = \frac{2}{5}MR^2</math></p> <p>(f)</p>
 <p>Thin spherical shell about any diameter</p> <p><math>I = \frac{2}{3}MR^2</math></p> <p>(g)</p>	 <p>Hoop about any diameter</p> <p><math>I = \frac{1}{2}MR^2</math></p> <p>(h)</p>	 <p>Slab about perpendicular axis through center</p> <p><math>I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)</math></p> <p>(i)</p>

# Übung XII – Trägheitsmoment

$$J_z = J_x \gg J_y$$



$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Prob. 17-9



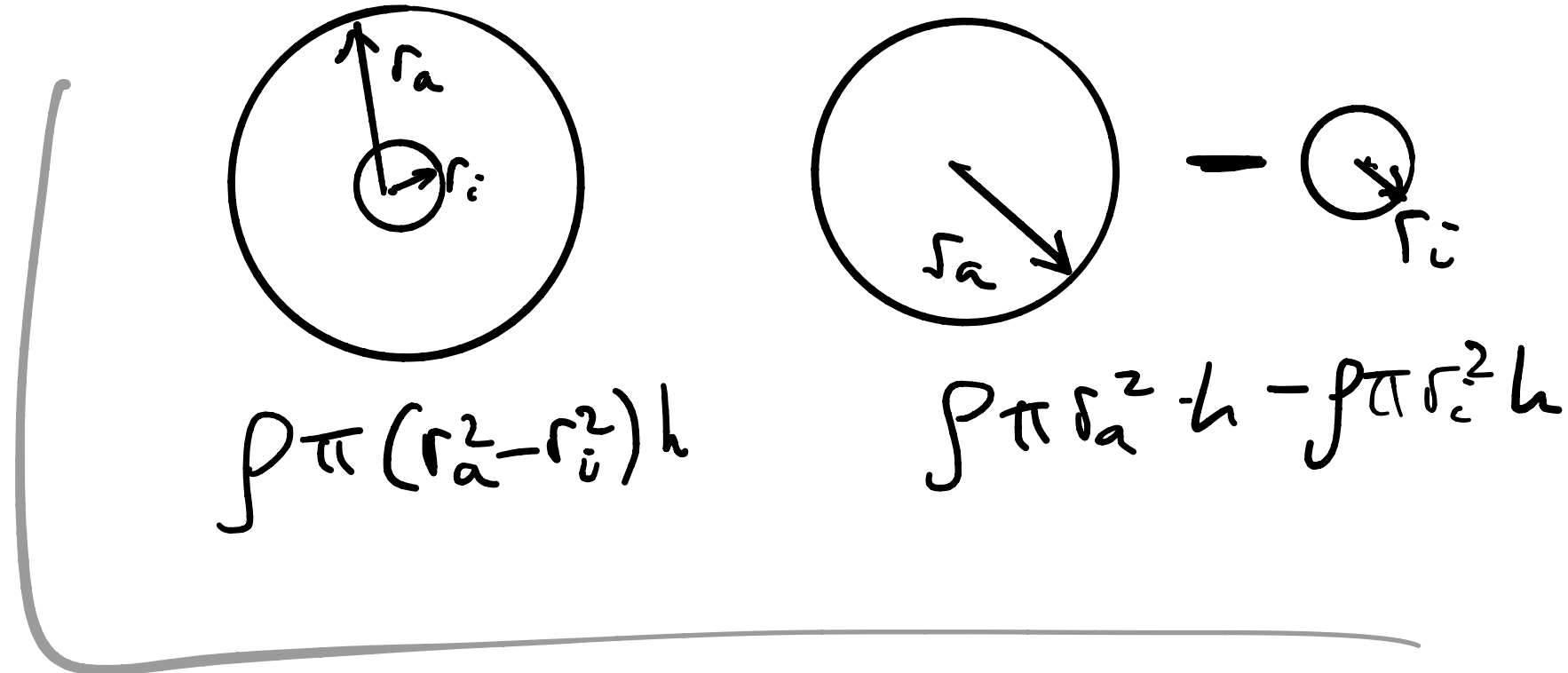
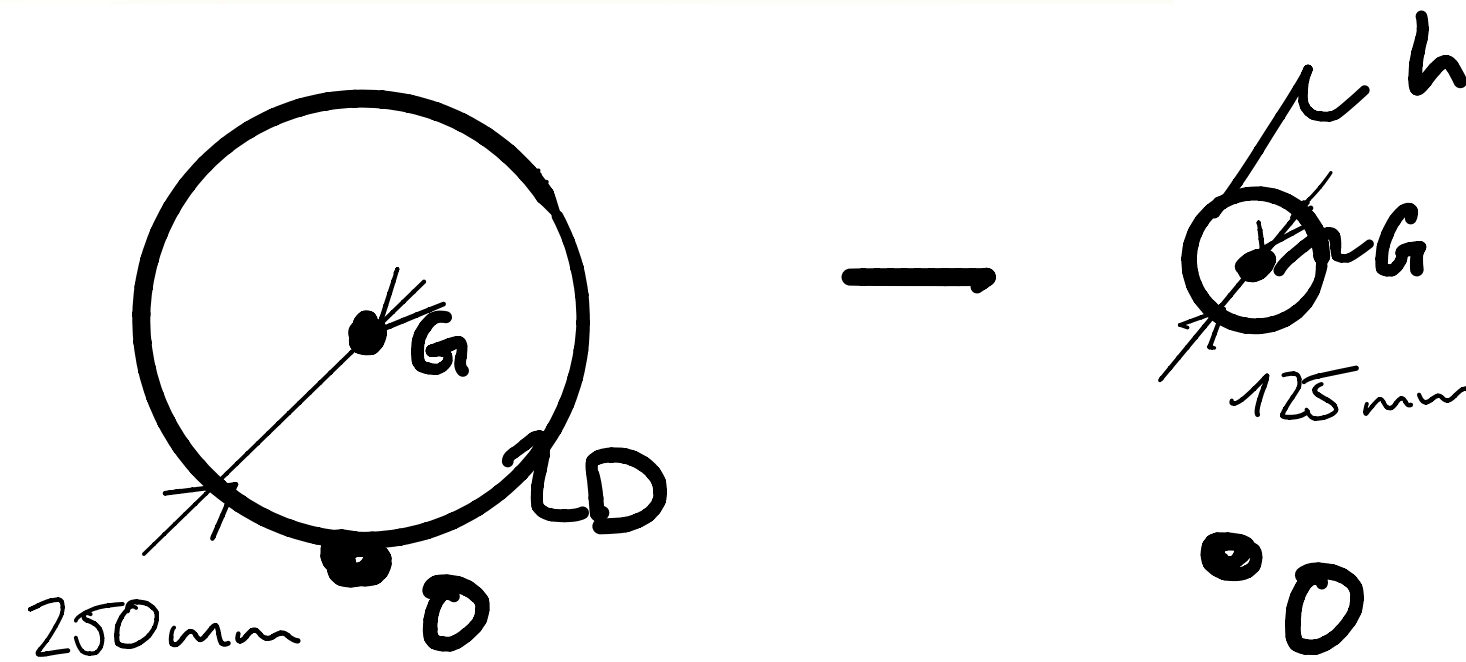
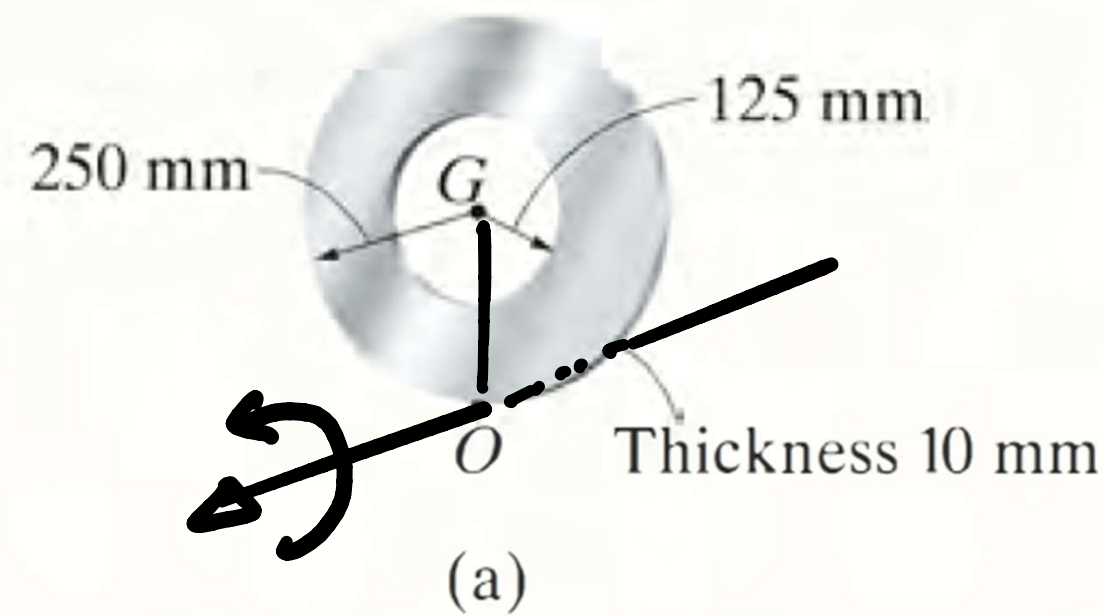
# Übung XIII – Trägheitsmoment

$$J_0 = \frac{1}{2} m r^2$$

Trägheitsmoment:  $J_S = \sum_i m_i r_{i,S}^2$

Satz von Steiner:  $J_A = J_{SP} + m d_A^2$

If the plate shown in Fig. 17-6a has a density of  $8000 \text{ kg/m}^3$  and a thickness of  $10 \text{ mm}$ , determine its moment of inertia about an axis directed perpendicular to the page and passing through point  $O$ .



$$J_{O,O} = J_0 + m_0 r_{0O}^2$$

$$= \frac{1}{2} m_0 r_0^2 + m_0 r_0^2$$

$$= \frac{1}{2} (15.71 \text{ kg}) (0.25 \text{ m})^2 + (15.71) (0.25 \text{ m})^2$$

$$= \underline{1.473 \text{ kgm}^2}$$

$$m_0 = \rho V_0 = \rho (\pi r_0^2 \cdot h)$$

$$= 8'000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} (\pi r_0^2 \cdot h)$$

$$= \underline{15.71 \text{ kg}}$$

$$J_{O,h} = m_h \left( \frac{r_h^2}{2} + r_0^2 \right)$$

$$m_h = \rho V_h = 8000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} (\pi r_h^2 \cdot h)$$

$$= \underline{3.927 \text{ kg}}$$

$$= \underline{0.276 \text{ kgm}^2}$$

$$J = \sum_{i=\{0,h\}} J_{O,i} = J_{O,0} - J_{O,h} \approx \underline{\underline{1.2 \text{ kgm}^2}}$$

# Übung XIV – Kinetik FS18

Das Tram 9 (

$$m = 40000 \text{ kg}$$

) fährt mit einer Geschwindigkeit von

$$v = 20 \text{ km/h} \quad | \cdot \frac{1}{3.6}$$

als

$$\rightarrow v = 5.556 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

10m

$$x = 10 \text{ m} - s$$

vor der Haltestelle "ETH Hauptgebäude" plötzlich eine Notbremsung eingeleitet werden muss. Wieviele Meter von der Haltestelle entfernt bleibt das Tram stehen, wenn die Bremsen eine konstante Bremskraft von

240kN

bewirken?

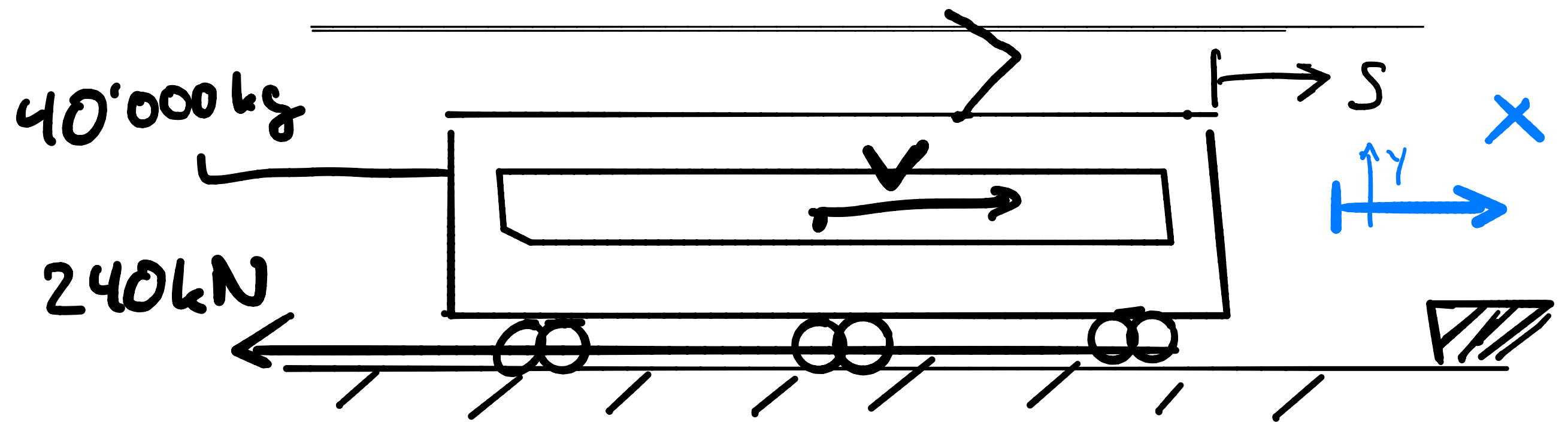
Anmerkung: nehmen Sie an, dass die Strecke keine Steigung aufweist

$$m \ddot{x} = -240 \text{ kN} \quad \left( \iint \dots dt \right)$$

$$m \dot{x} = -240 \text{ kN} t + v_0$$

$$m x = -240 \text{ kN} \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$$

$x?$   $t?$



10m

$$E_{kin} = \text{Arbeit} + E_{kin,2} \rightarrow 0$$

2.58

$$\frac{1}{2} m v^2 = - \int F_B \cdot ds = - \int \begin{pmatrix} -240 \text{ kN} \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ds_x \\ ds_y \end{pmatrix} \rightarrow 0$$

$$= 240 \text{ kN} \cdot s_x$$

$$s = \frac{1}{2} \frac{40'000 \text{ kg}}{240'000 \text{ N}} (5.556)^2 = 2.58 \text{ m}$$

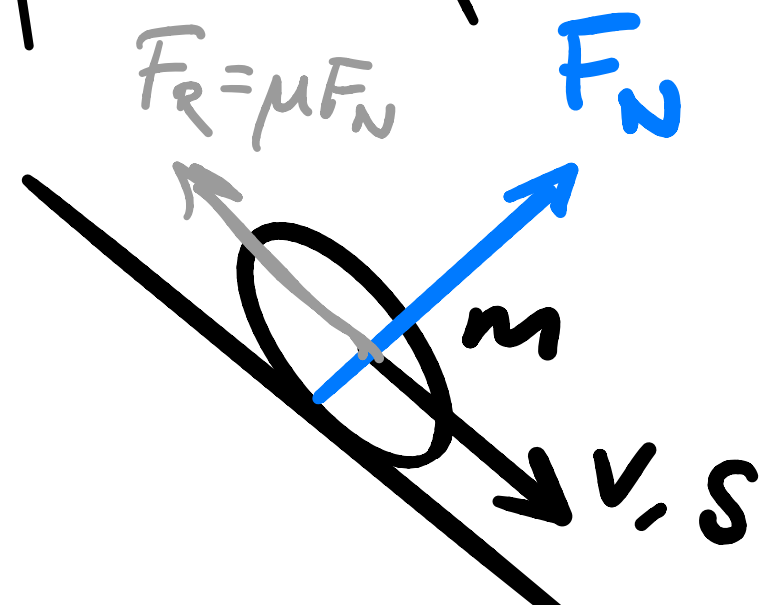
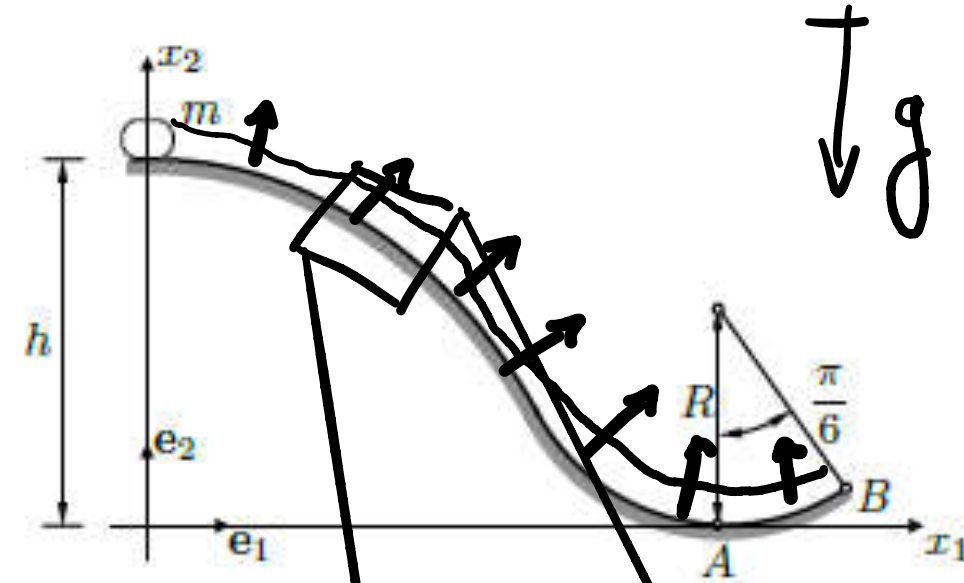
$$x = 10 - 2.58 = \underline{\underline{7.42 \text{ m}}}$$

# Übung XV – Dynamik Massenpunkt

Arbeit  $W = -\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$

2.2 A block of mass  $m$  slides down a frictionless incline. The block is released at height  $h$  above the bottom of the loop, with negligible velocity. What is the work  $W$  done by the reaction force  $\mathbf{F}_N$  exerted by the track on the sliding block, when the block reaches point  $B$ ?

- (a)  $W = 0$
- (b)  $W = mgR(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$
- (c)  $W = mgh$
- (d)  $W = mgR\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (e)  $W = mg\sqrt{h}$



$F_N \perp v$   
 $\perp s$

$W = 0$



# Übung XVI – Dynamik Massenpunkt

$$W = -\int F \cdot ds$$

2.2 A block of mass  $m$  slides down a frictionless incline. The block is released at height  $h$  above the bottom of the loop, with negligible velocity. What is the work  $W$  done by gravity  $F_G = mg$  exerted by the track on the sliding block, ~~when the block reaches point B?~~ **from A  $\rightarrow$  B**

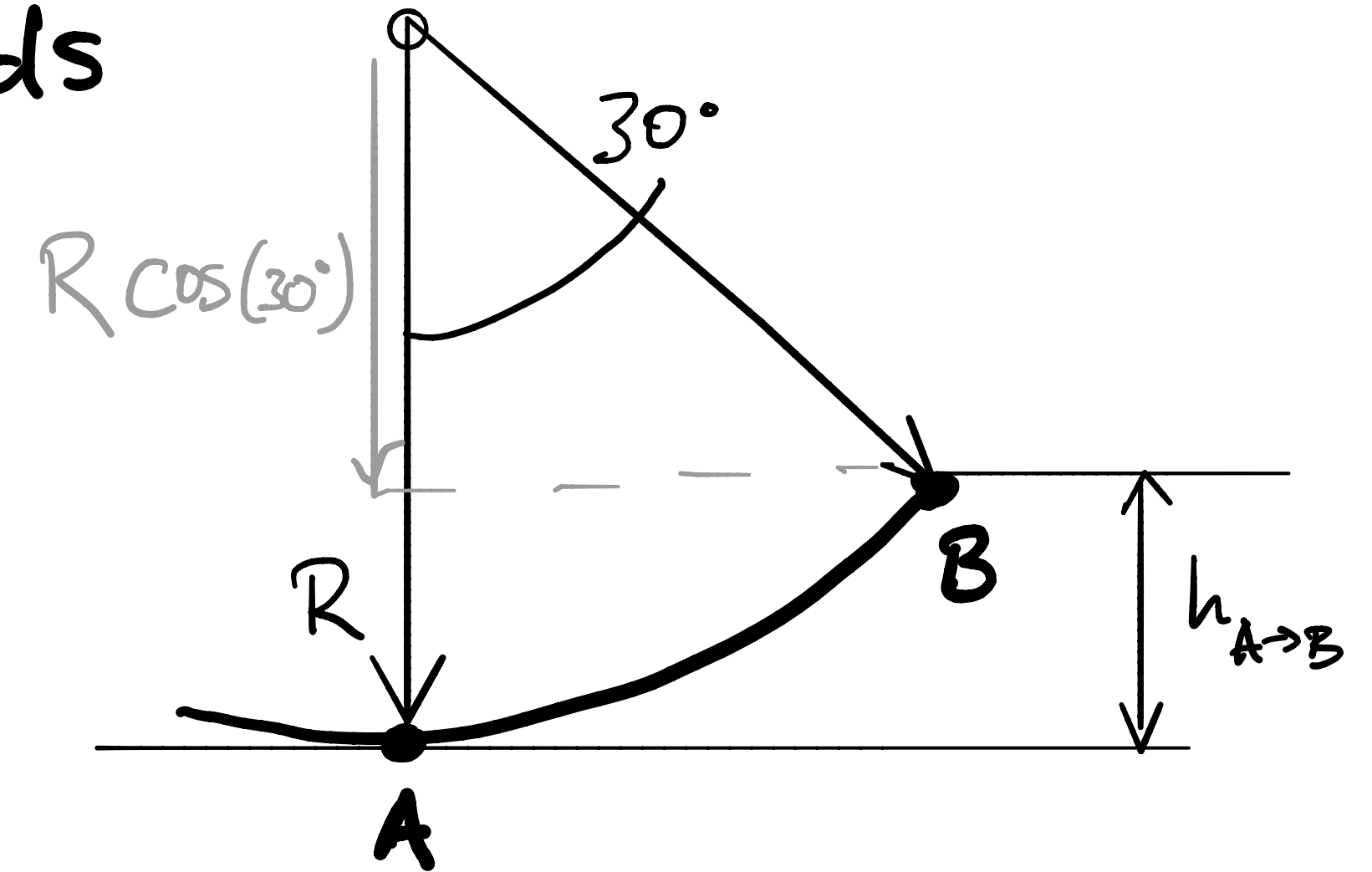
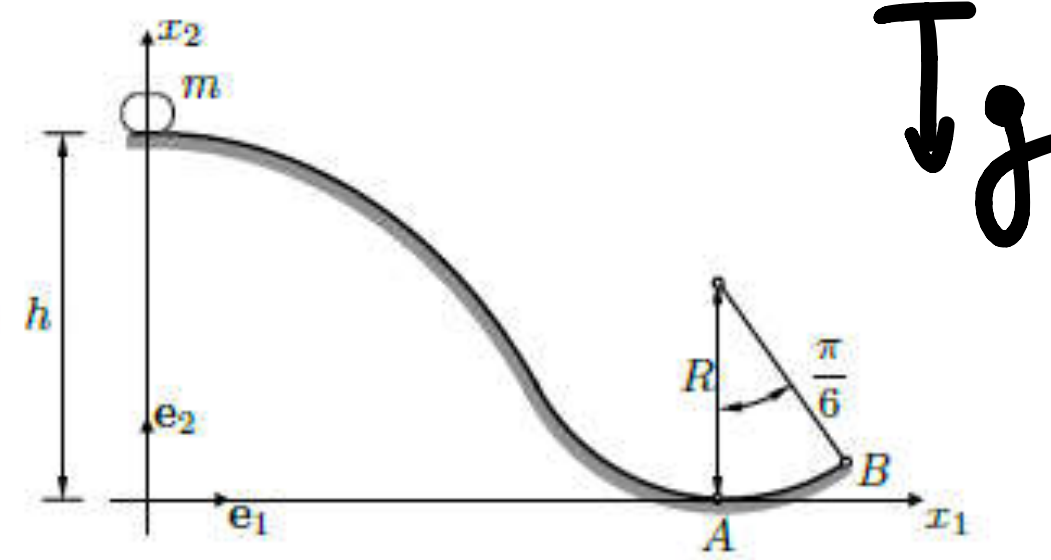
(a)  $W = 0$

**(b)  $W = mgR(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$**

(c)  $W = mgh$

(d)  $W = mgR\frac{\sqrt{3}}{2}$

(e)  $W = mg\sqrt{h}$



$$W = E_{pot} = -(-mgh_{A \rightarrow B})$$

$$h_{A \rightarrow B} = R - R \cos(30^\circ) = R(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$W = E_{pot} = \underline{\underline{mgR(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})}}$$

# Übung XVII – Dynamik Massenpunkt

2.4 A block of mass  $m$  slides along a rough inclined plane with kinetic friction coefficient  $\mu$ , where  $\alpha$  indicates the inclination angle. The block is given an initial velocity  $v_0$  at time  $t_0$  directed down the incline. How much time  $t_s$  does the block need in order to stop?

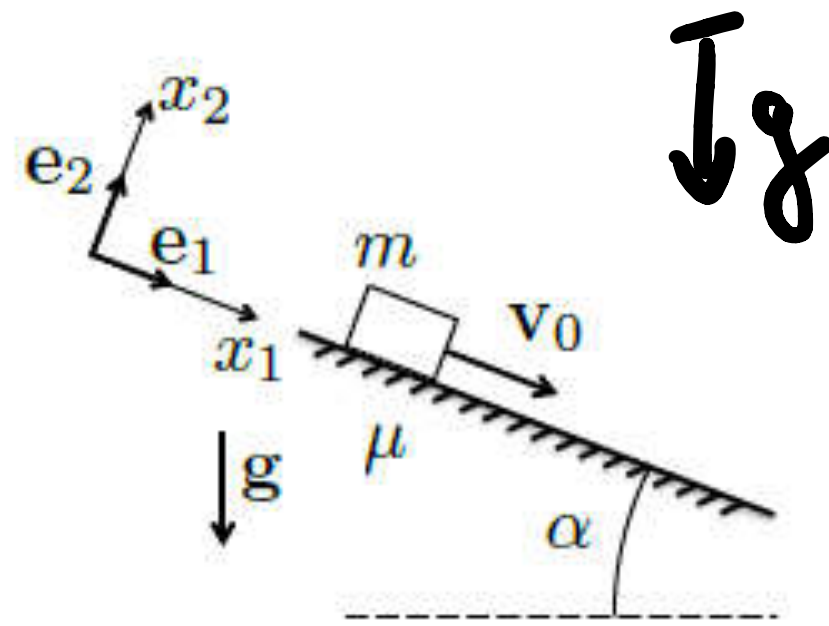
(a)  $t_s = \frac{v_0}{g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}$

(b)  $t_s = \frac{v_0}{g(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)}$

(c)  $t_s = \frac{gv_0}{(\mu \sin \alpha - \cos \alpha)}$

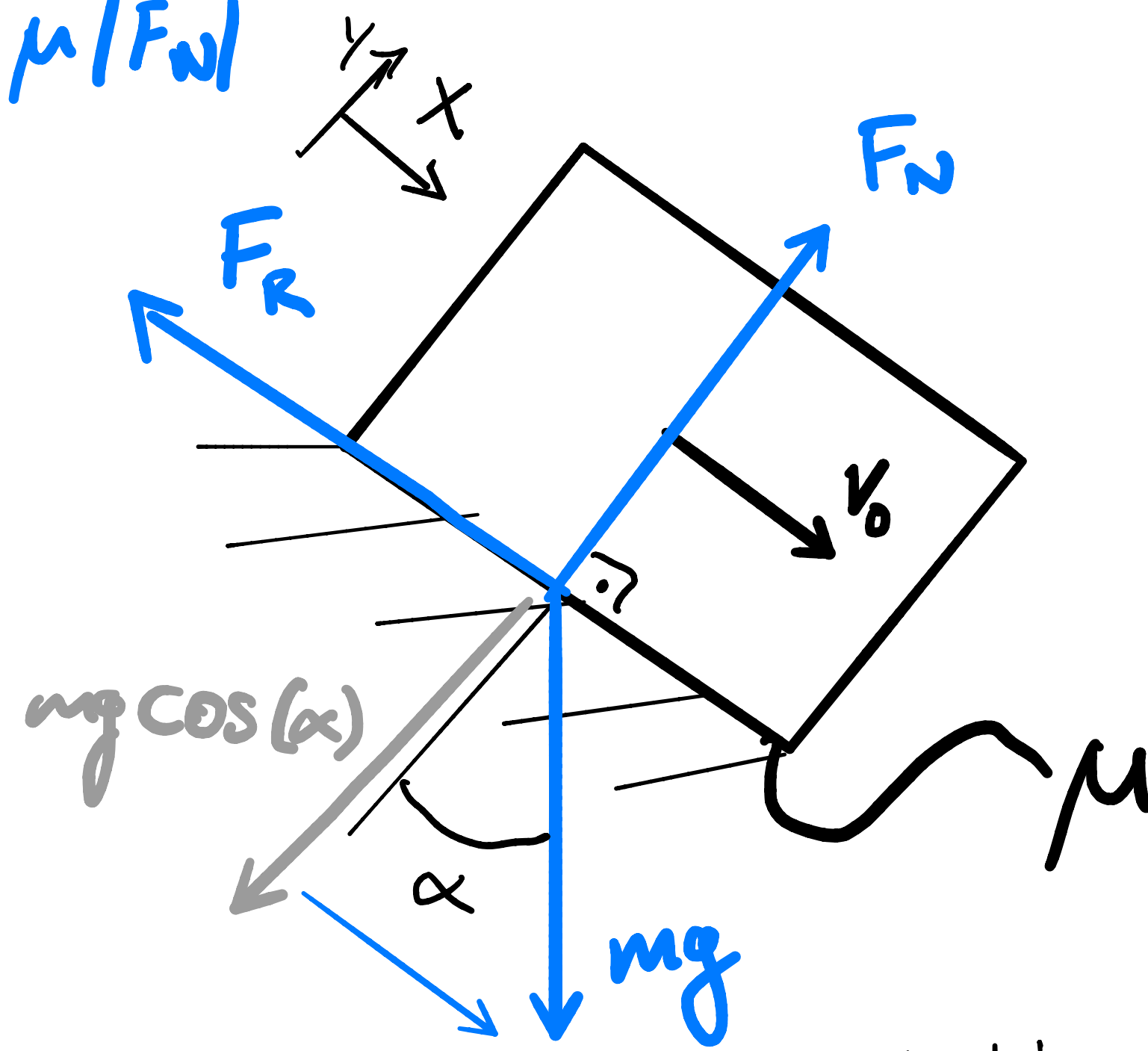
(d)  $t_s = \frac{v_0}{g(\mu \sin \alpha + \cos \alpha)}$

(e)  $t_s = \frac{v_0^2}{g(\mu \sin \alpha + \cos \alpha)}$



$\downarrow g$

$|F_R| = \mu |F_N|$



$m\ddot{x} = \sum F_i$

$= -F_R + \sin \alpha \cdot mg$

$= -\mu F_N + \sin \alpha \cdot mg$

$= -\mu \cos \alpha \cdot mg + \sin \alpha \cdot mg$

$\ddot{x} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$

$\Rightarrow \int \ddot{x} dt = \dot{x} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)t + v_0$

$\dot{x}(t_s) = v(t_s) \stackrel{!}{=} 0$

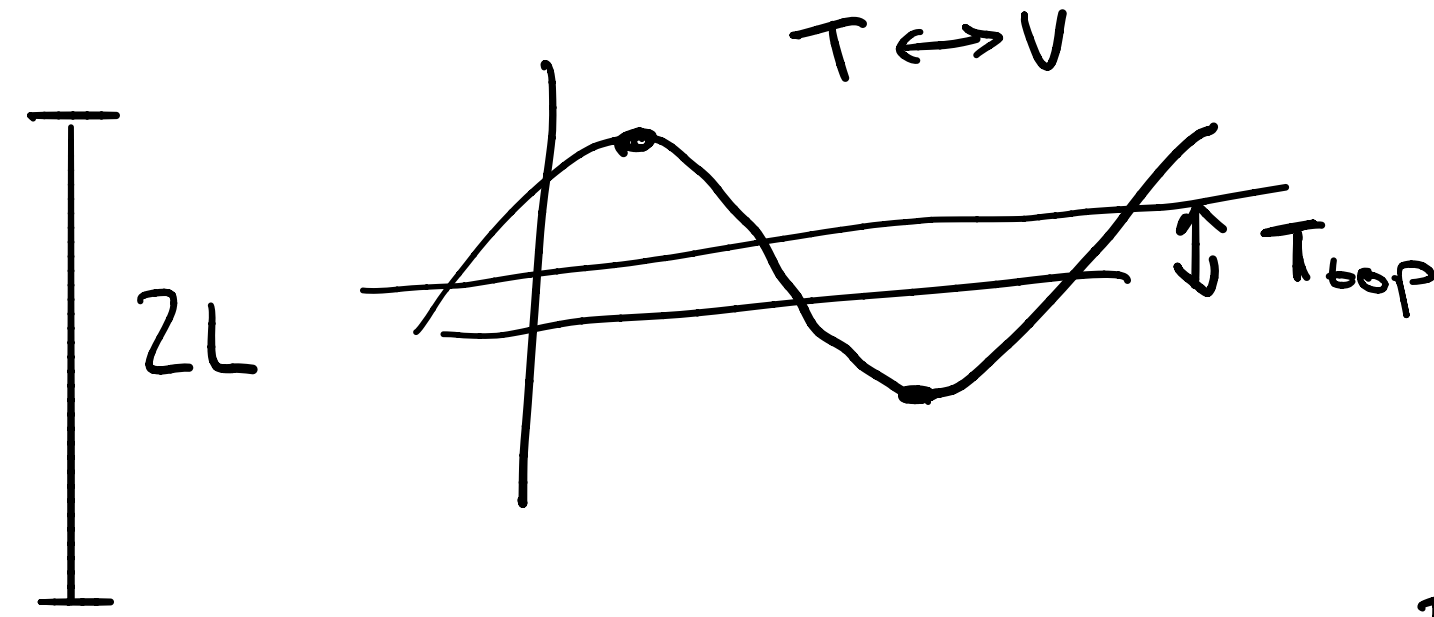
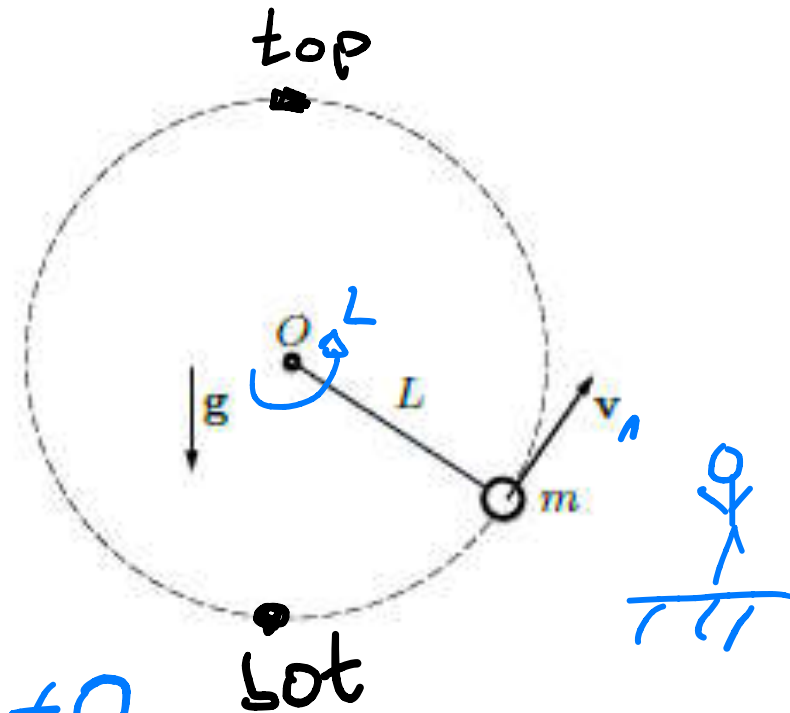
$\Rightarrow t_s = \frac{-v_0}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}$

Actio-Reactio!  
 $\sum F_y \stackrel{!}{=} 0: F_N = \cos \alpha \cdot mg$

# Übung XVIII – Dynamik Massenpunkt

Linear momentum  $\hat{=}$  lineare Impuls  $\underline{p} = m \cdot \underline{v}$   
 angular momentum  $\hat{=}$  Drehimpuls  $\underline{L} = J \cdot \underline{\omega}$

3.2 A ball of mass  $m$  is attached to a string of length  $L$ . It is being swung in a vertical circle with enough speed so that the string remains taut throughout the entire motion. Assume that no form of air resistance is present.

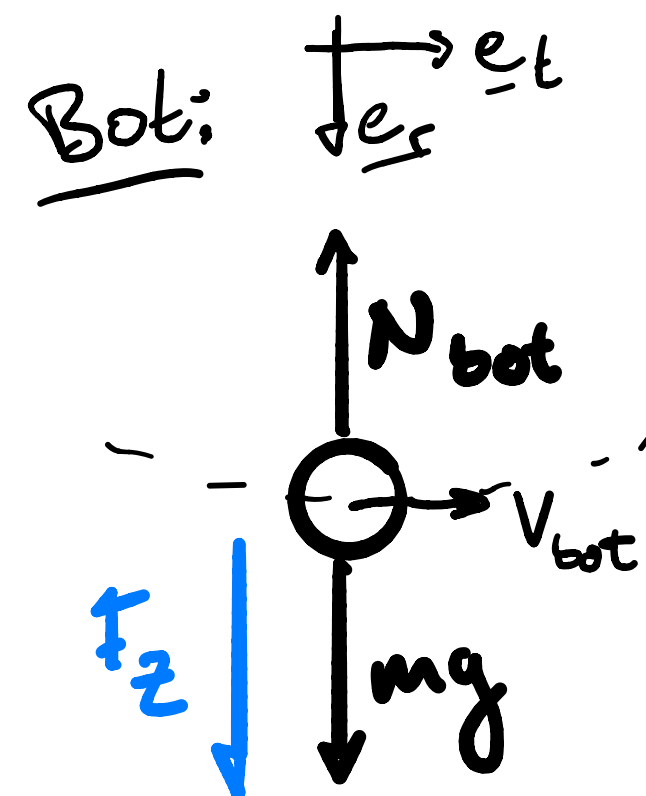


1. Which of the following statements is correct?

- (a) The linear momentum is conserved.  $\underline{p} \sim \frac{\partial \underline{p}}{\partial t} \neq 0$
- (b) The angular momentum is not conserved.  $\underline{L} \sim \frac{\partial \underline{L}}{\partial t} \neq 0$
- (c) The magnitude of the angular momentum remains constant but direction changes.
- (d) Angular momentum is zero.
- (e) The ~~kinetic~~ energy is constant.  $E_{tot} = E_{kin} + E_{pot}$

2. At the top and bottom of the vertical circle, the magnitude of the constraint force on the ball is  $N_{top}$  and  $N_{bot}$ , respectively. What is the value of the difference  $N_{bot} - N_{top}$ ?

- (a)  $N_{bot} - N_{top} = 5mg$ .
- (b)  $N_{bot} - N_{top} = 6mg$ .
- (c)  $N_{bot} - N_{top} = -7mg$ .
- (d)  $N_{bot} - N_{top} = -2mg$ .
- (e)  $N_{bot} - N_{top} = 0$ .



$$N_{bot} = mg + F_z$$

$$= mg + \frac{4gL}{L} m$$

$$= 5mg$$

$$F_z = a_z m$$

$$= \omega^2 L m$$

$$= \frac{v_{bot}^2}{L} m$$

$$E_{kin,bot} = E_{pot,top}$$

$$\frac{1}{2} m v_{bot}^2 = m g 2L$$

$$v_{bot}^2 = 4gL$$

wegen  $\Delta v$  in  $N_{bot}$

$$mg + N_{top} = F_z$$

$$N_{top} = -mg + a_z m$$

$$= -mg + 0$$

$$N_{bot} - N_{top} = F_{z,bot} + mg = (F_z - mg)$$

$$= \frac{v_{bot}^2}{L} m + mg + mg - \frac{v_{top}^2}{L} m$$

$$= \frac{m}{L} (v_{bot}^2 - v_{top}^2) + 2mg$$

(\*)  $\Rightarrow v_{bot}^2 - v_{top}^2 = 4gL$

$$N_{bot} - N_{top} = \frac{4gLm}{L} + 2mg$$

$$V_{top} + T_{top} = T_{bot} (*)$$

# Übung XIX – Dynamik Massenpunkt HS18

Ein Mann ( $m_M = 80\text{kg}$ ) fährt auf seinem  $m_S = 2\text{kg}$  schweren Luftkissen-Schlitten einen Berg mit einer Steigung von  $s = 21^\circ$  herunter. Berechne die Beschleunigung die dieser Schlittenfahrer bei seiner Abfahrt erfährt, wenn der Gleitreibungskoeffizient  $k = 0.07$  beträgt.

ges:  $\ddot{x}$

$m\ddot{x} = \sum_i F_i$

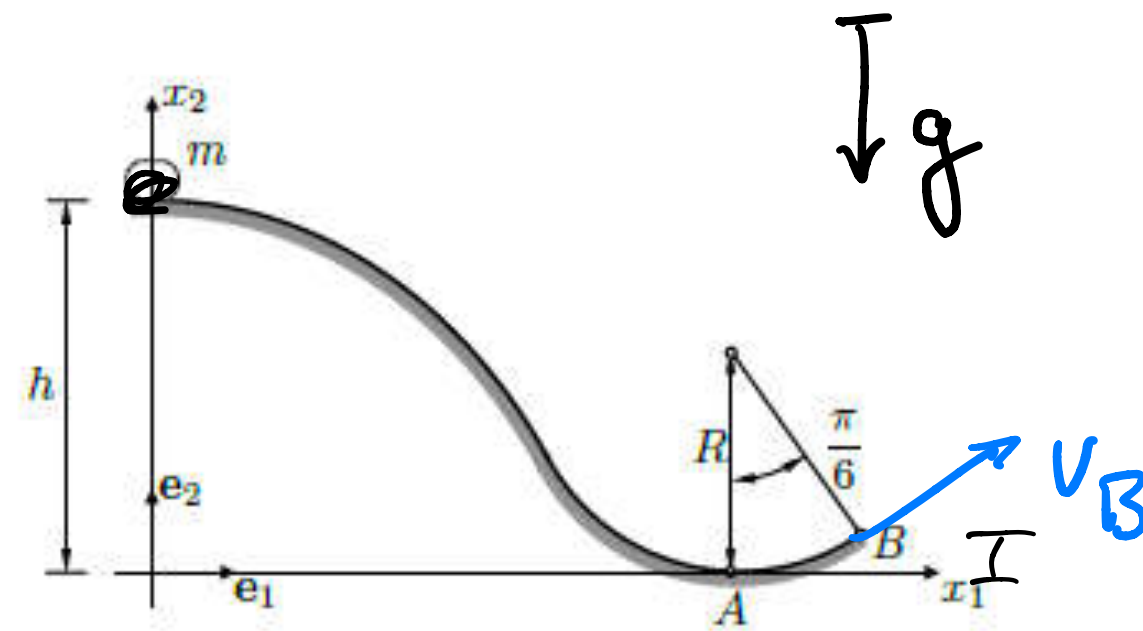
$= -F_R + \sin\alpha mg$

$= -\mu F_N + \sin(\alpha)mg, \quad F_N = \cos(\alpha)mg$

$\ddot{x} = \sin(21^\circ)g - \mu \cos(21^\circ)g = g(0.293) = \underline{\underline{2.874 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$

# Übung XX – Dynamik Massenpunkt

2.3 A block of mass  $m$  slides down a frictionless incline (see Fig.). The block is released at height  $h$  above the bottom of the loop, with negligible velocity. At what speed  $v_B = |\mathbf{v}_B|$  does the block leave the track at point  $B$ ?



$$T = E_{kin} = E_{trans.} + E_{rot.} \\ = \frac{1}{2} m v^2$$

(a)  $v_B = \sqrt{2g \left[ h - R \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]}$

(b)  $v_B = \sqrt{2g \left[ h - R \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]}$

(c)  $v_B = \sqrt{mg \left[ h - R \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]}$

(d)  $v_B = \sqrt{mg \left[ h - R \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]}$

(e)  $v_B = \sqrt{2mg \left[ h - R \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]}$

$$E_{pot,0} + E_{kin,0} = E_{pot,B} + E_{kin,B}$$

$$V_{top} + T_{top} = V_B + T_B$$

$$mgh + 0 = mgR \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$v_B^2 = \left( gh - gR \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) 2$$

$$v_B = \sqrt{2g \left( h - R \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)}$$



# Kinetik – Impulserhaltung

Impulserhaltung über einen Stoß gilt immer!  
 Energieerhaltung nicht immer gültig!  
 $\Delta U \geq 0$

## Stöße

Gerade, zentral, teilelastisch, glatt

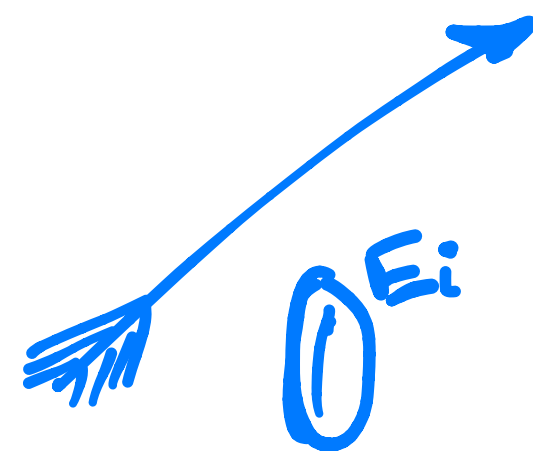
$$v_1' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 (v_1 - v_2) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 (v_2 - v_1) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta U = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 (1 - C_R^2)$$

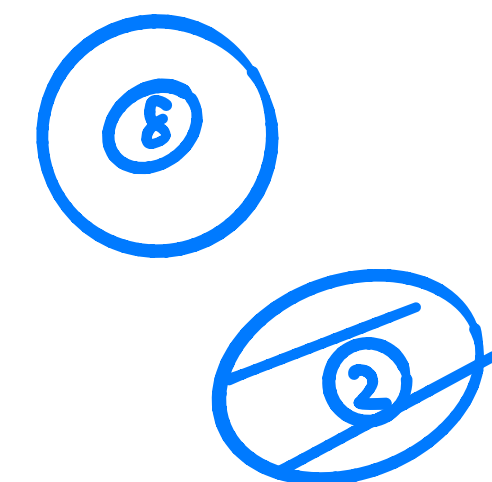
$$C_R = \frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} \begin{matrix} \sim \text{nach dem Stoß} \\ \sim \text{vor dem Stoß} \end{matrix}$$

$$C \in [0, 1]$$



$C=0$   
Inelastisch

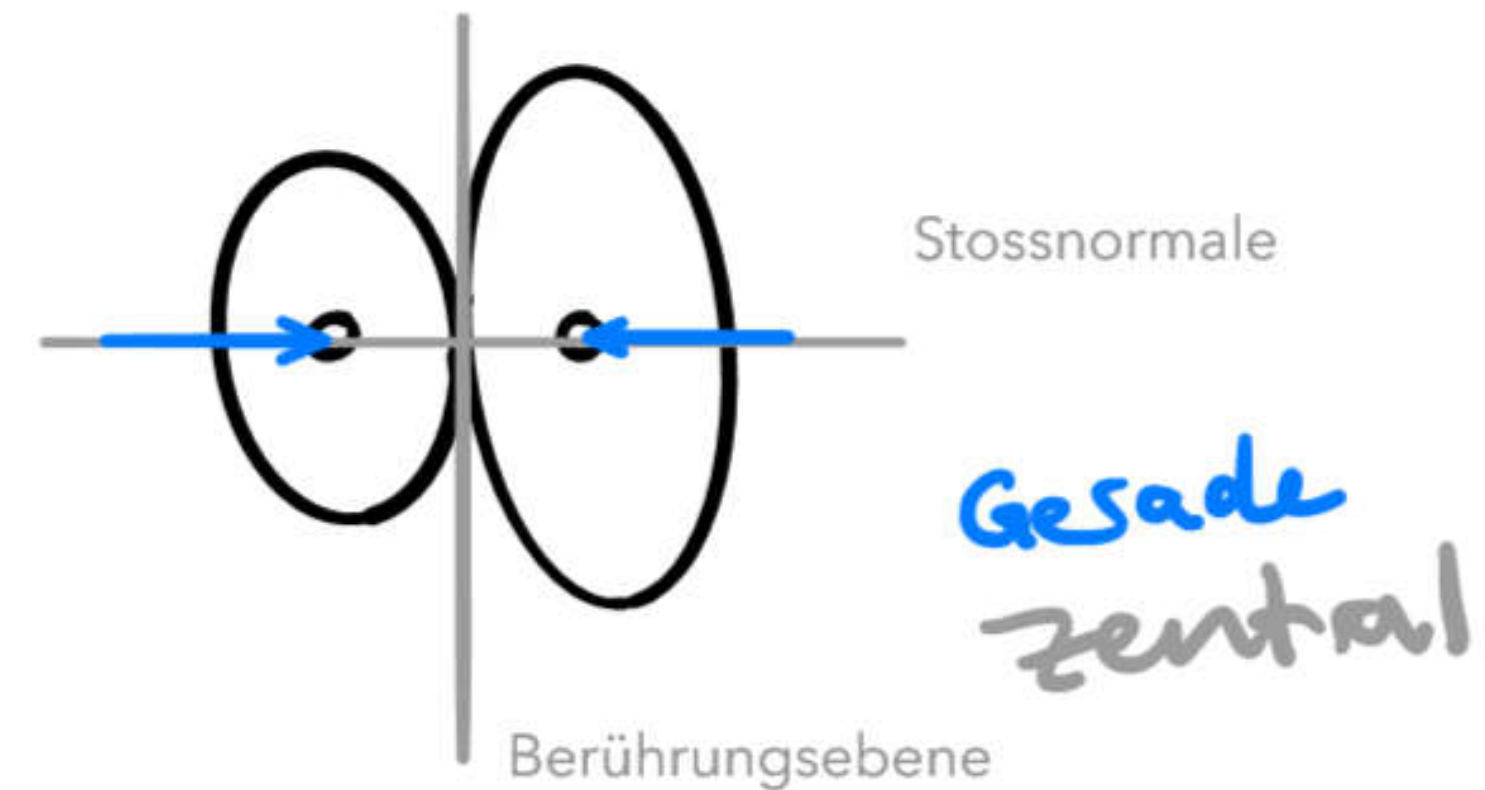
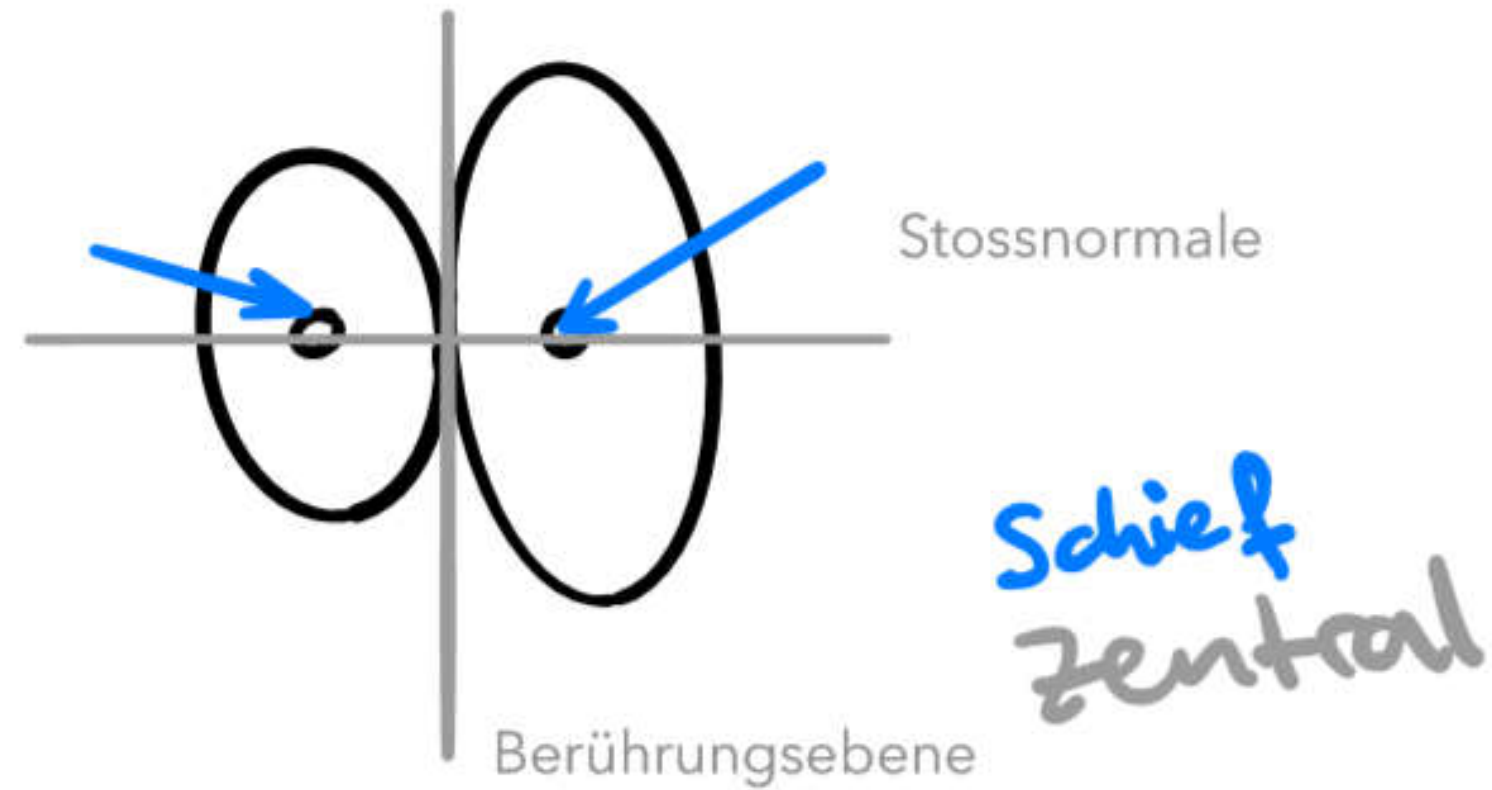
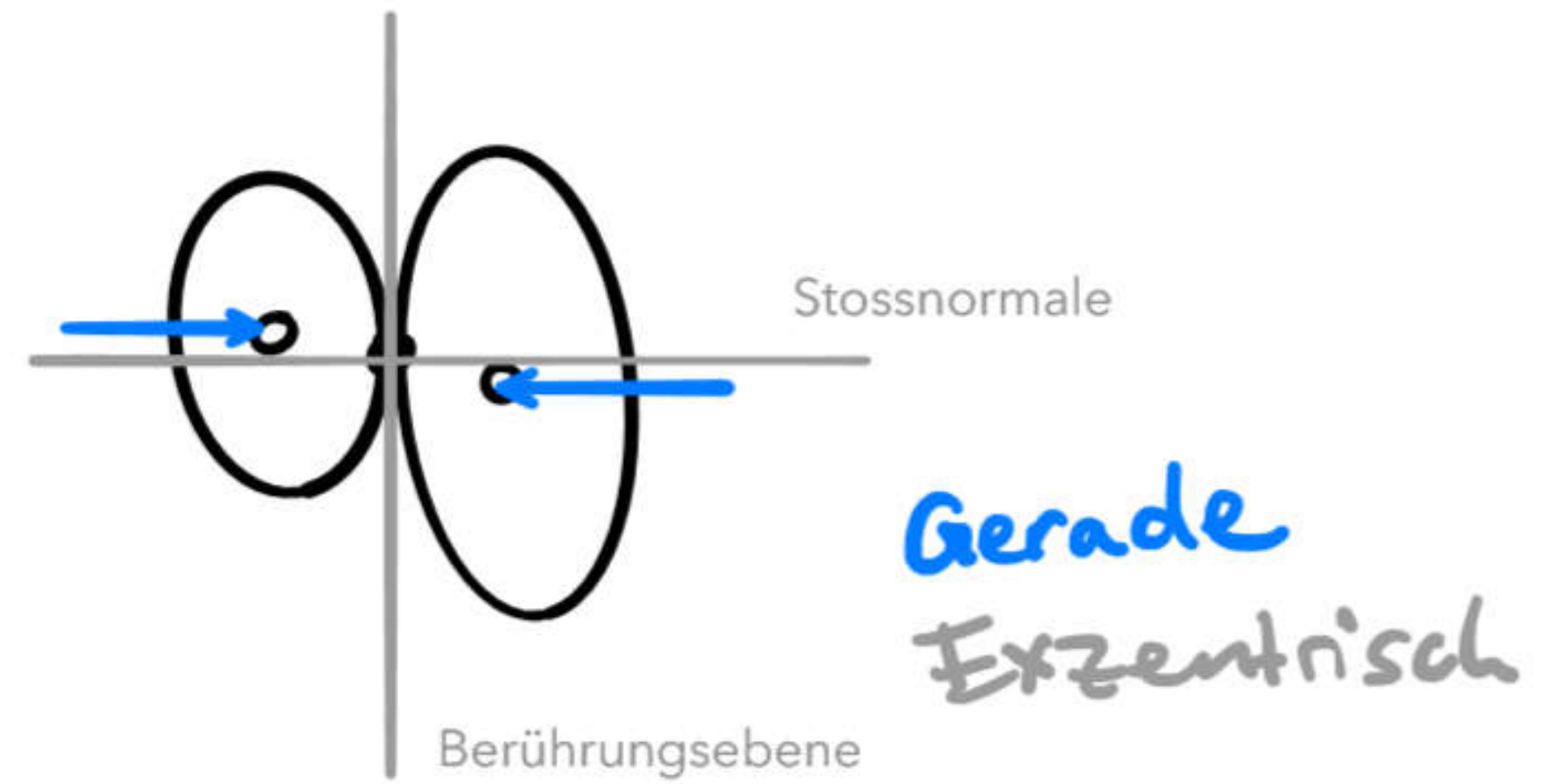
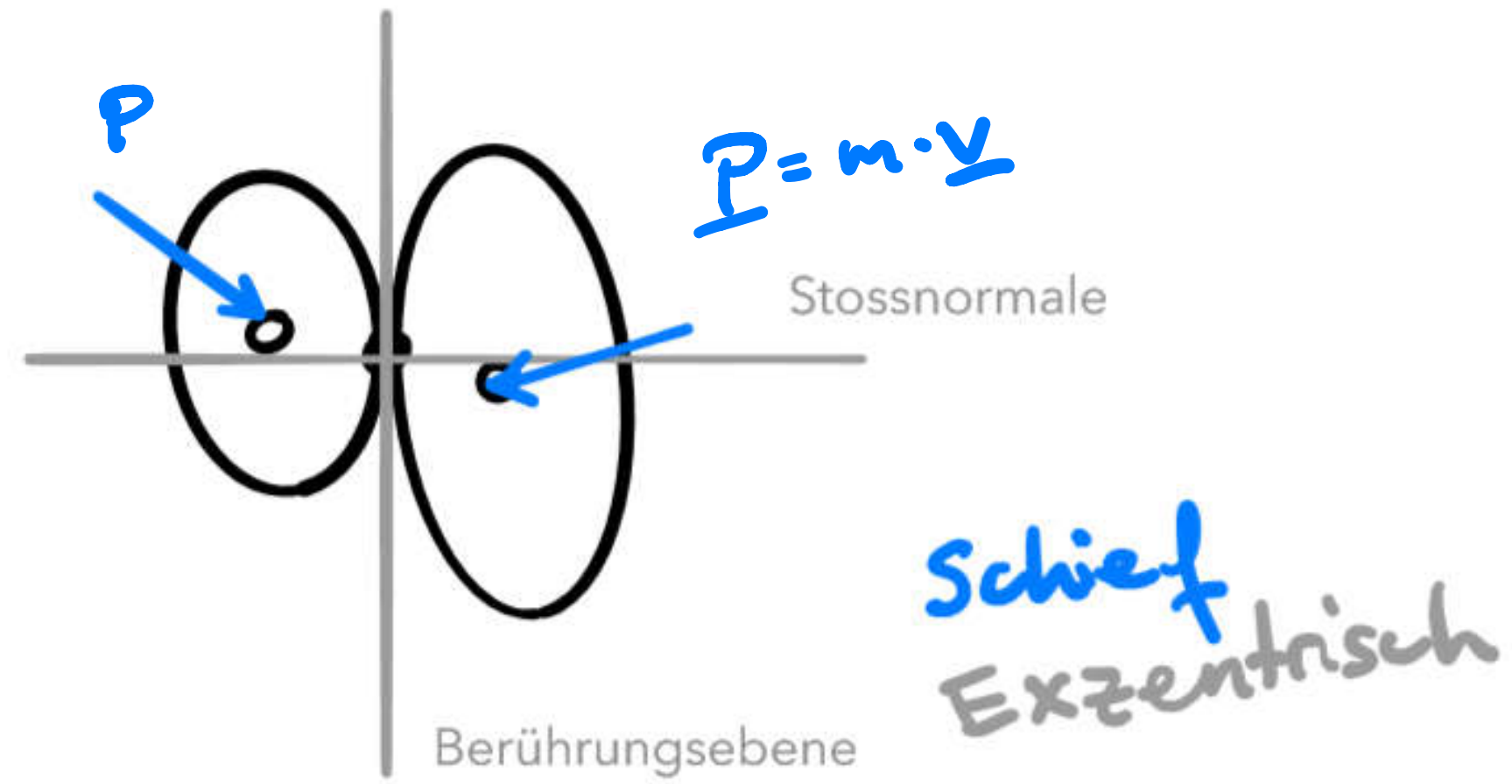
$C=1$  : ideal elastisch  
↳ Energieerhaltung



# Übung XXI – Impulserhaltung

- a) Bei zentralen <sup>glatten</sup> Stößen liegen die Impulse der Stosskörper auf der Stosslinie  (zu allgemein)
- b) Beim ideal elastischen Stoss wird keine Energie in innere Energie umgewandelt.
- c) Bei glatten Stößen findet die Impulsübertragung entlang der Stosslinie statt   
 $z c = 1 \rightarrow \Delta u = 0$
- d) Bei inelastischen Stossprozessen gilt die Impulserhaltung
- e)  $z c = 0$   $-1-$  Energieerhaltung

# Impulserhaltung



# Impulserhaltung

## Schief, exzentrisch

Geschwindigkeitsrichtung mind. eines Körpers liegt **nicht** parallel zur Stossnormalen. Stossnormale geht **nicht** durch beide Schwerpunkte.

## Schief, zentral

Geschwindigkeitsrichtung mind. eines Körpers liegt **nicht** parallel zur Stossnormalen. Stossnormale geht durch beide Schwerpunkte.

## Gerade, exzentrisch

Geschwindigkeitsrichtungen der beiden Körper liegen parallel zur Stossnormalen. Stossnormale geht **nicht** durch beide Schwerpunkte.

## Gerade, zentral

Geschwindigkeitsrichtungen der beiden Körper liegen parallel zur Stossnormalen. Stossnormale geht durch beide Schwerpunkte.

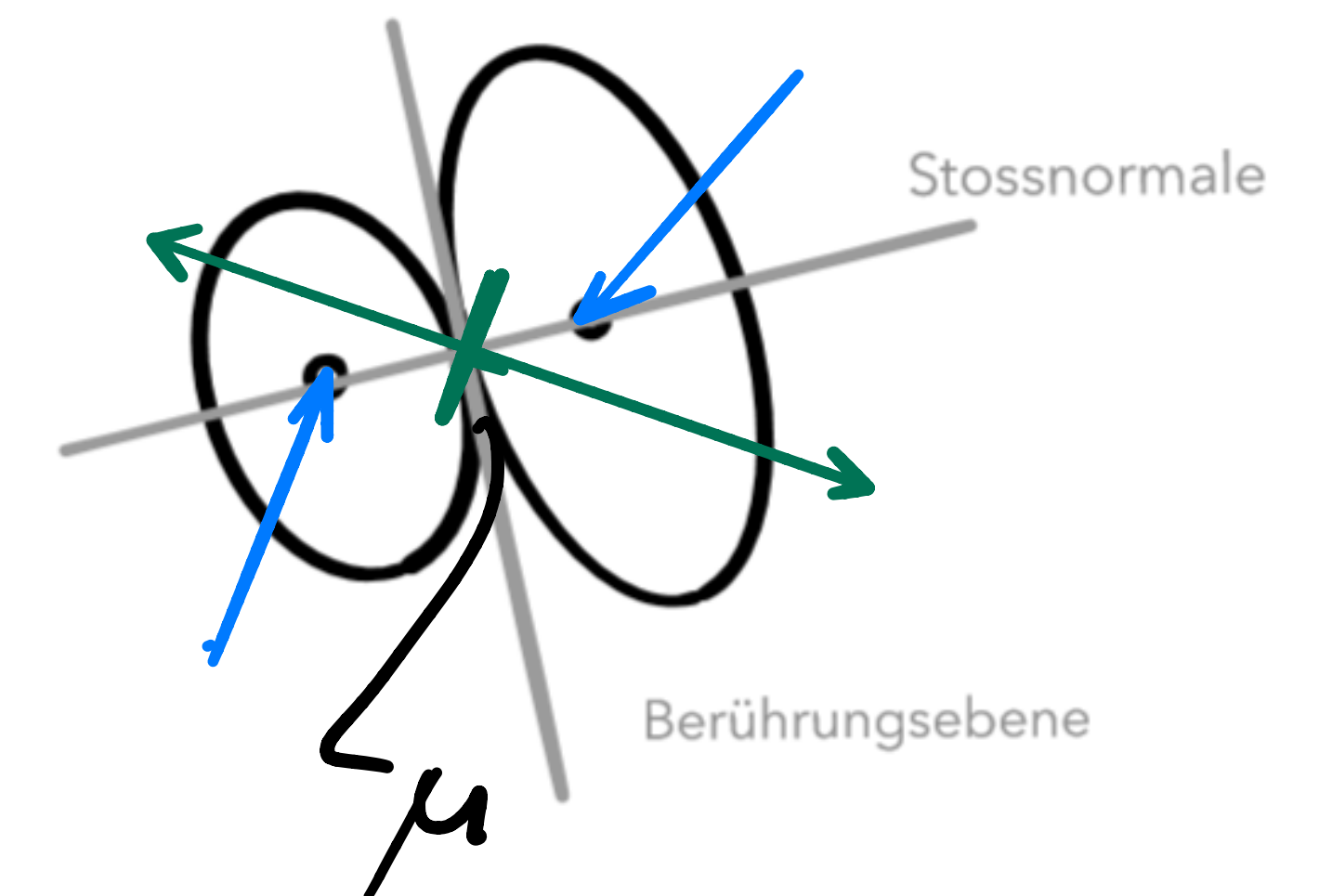
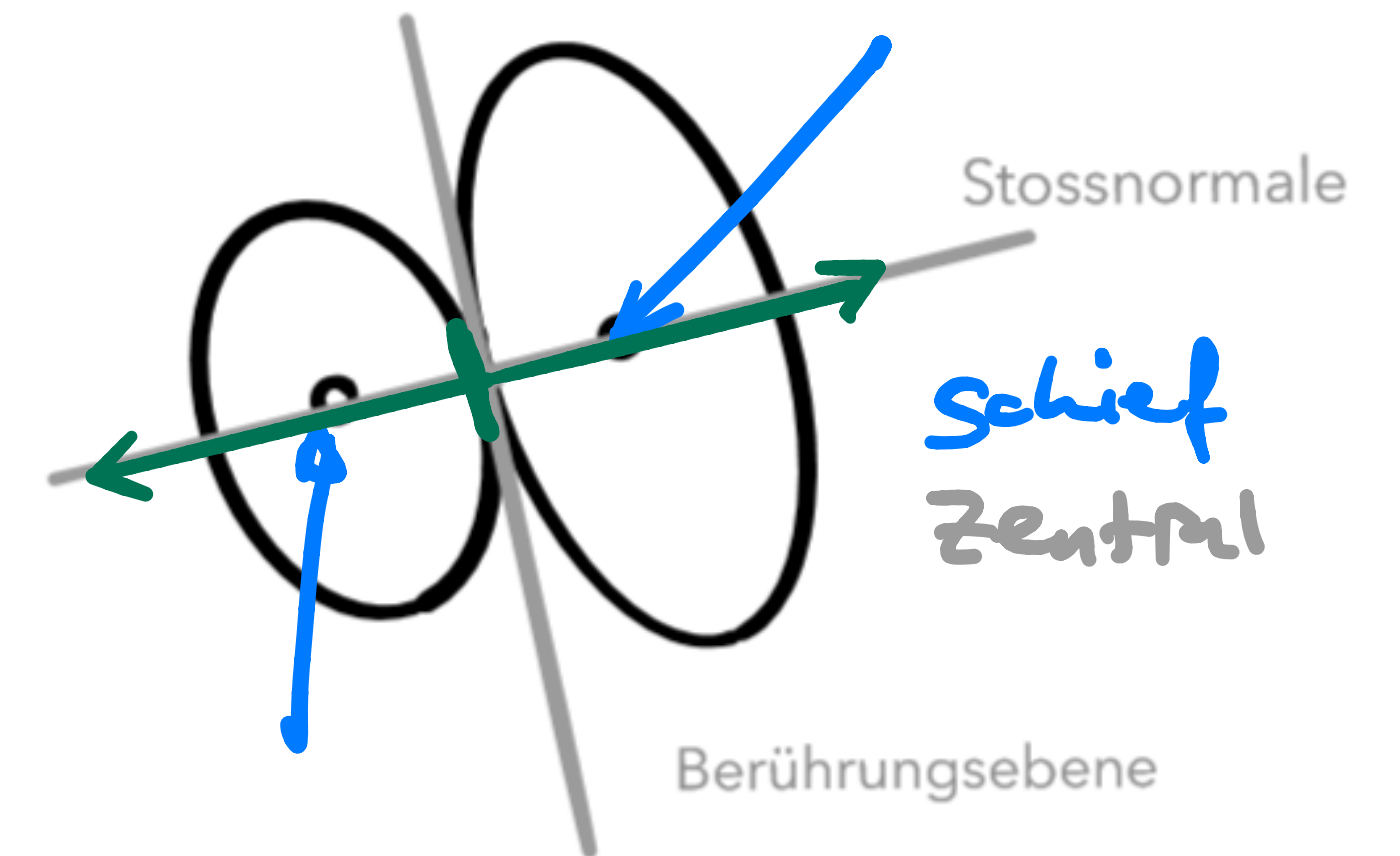
# Impulserhaltung

## Glatter Stoss

Ein glatter Stoss liegt dann vor, wenn die Stosskräfte in Richtung der Stoßnormalen wirken. Reibungskräfte werden dabei vernachlässigt.

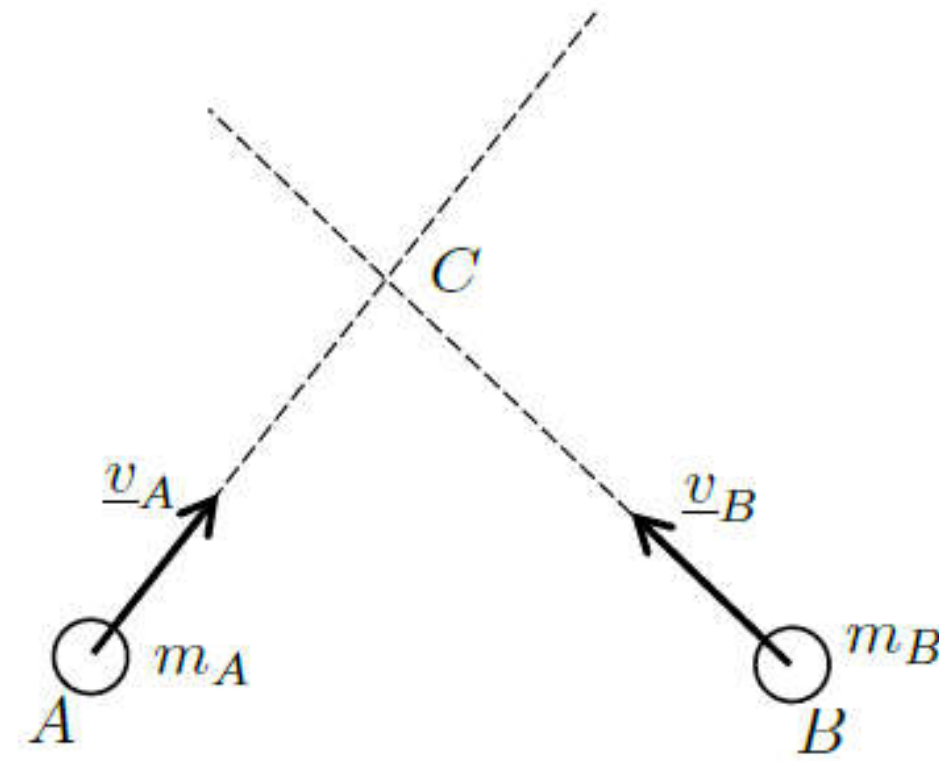
## Rauer Stoss

Hingegen liegt ein rauer Stoss vor, wenn die Reibungskräfte nicht vernachlässigt werden und damit auch Stosskräfte in der Berührungsebene wirken.



# Übung XXI – Impulserhaltung

5.2 Consider two particles  $A$  and  $B$  of negligible dimensions and masses  $m_A$  and  $m_B$ , respectively, moving freely with velocities  $\underline{v}_A$  and  $\underline{v}_B$  on a smooth, horizontal plane. They collide at a non-zero angle at point  $C$ , as shown. The impact forces are only aligned with the contact direction, i.e. no tangential impact forces are developed during the impact. Denote with  $\epsilon$  the coefficient of restitution ( $0 < \epsilon \leq 1$ ). Which of the following statements is correct?



- (a) The kinetic energy is conserved for any  $\epsilon$  ( $\epsilon=1$ )
- (b) The kinetic energy is conserved only if  $\epsilon=0$ .
- (c) The linear momentum of each particle is conserved.  $v \neq v'$
- (d) The linear momentum of the complete system is conserved for any  $\epsilon$
- (e) The linear momentum of the complete system is conserved only when  $\epsilon=1$ .

linear momentum  $\hat{=}$  linear impulse

# Übung XXII – Impulserhaltung

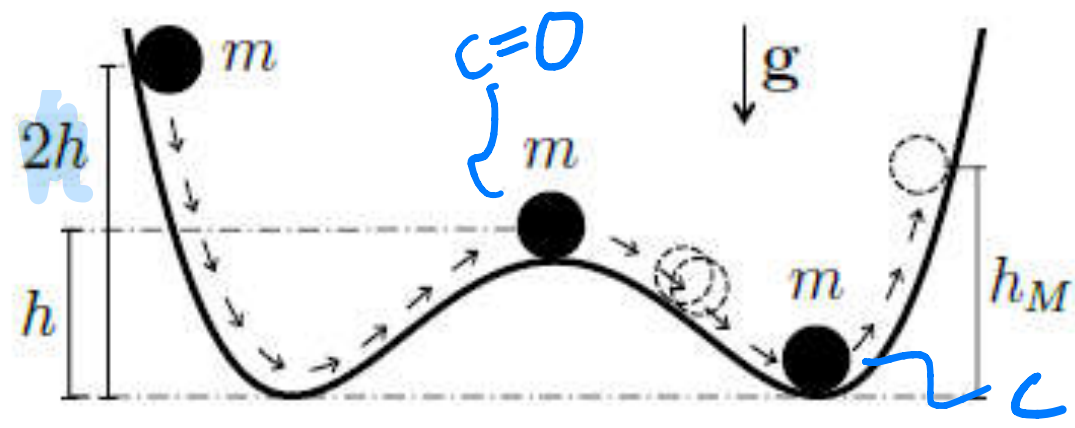
↻ **Energieerhaltung** ↻  
↻ **Impulserhaltung** ↻

$$v'_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 (v_1 - v_2) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 (v_2 - v_1) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta U = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 (1 - C_R^2)$$

6.2 Three particles of equal mass  $m$  and negligible dimensions are at rest in the position shown in the figure on a smooth curvilinear guide laying in a vertical plane. The first particle is released from a height  $2h$  and then impacts the second particle with a perfectly inelastic collision. After the impact, these two particles slide down and collide with the third particle. The coefficient of restitution of this last impact is  $e$ . What is the maximum height  $h_M$  reached by the last particle? Assume that the particles never detach from the guide.

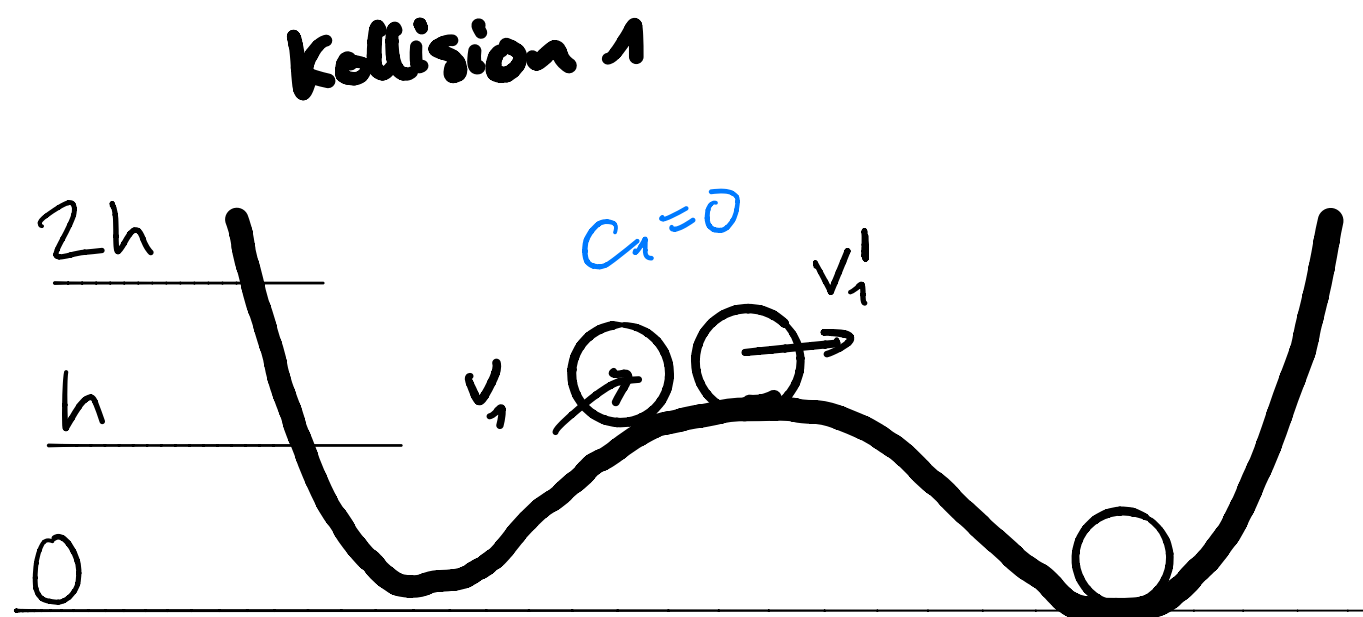


$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

$$2mgh = \frac{1}{2} m v_1^2 + mgh \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh}$$

$$v'_1 = \frac{m v_1 + m \cdot 0}{m + m} - 0 = \frac{v_1}{2} = \sqrt{\frac{gh}{2}}$$

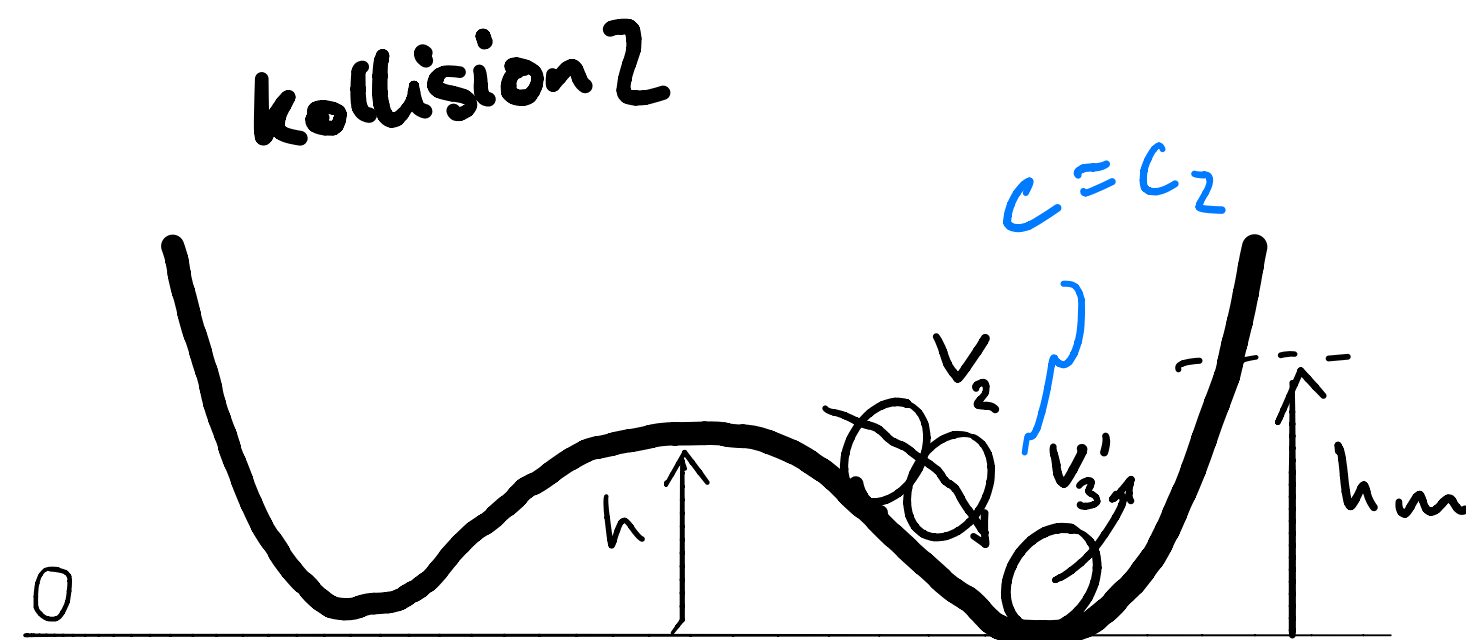
- (a)  $h_M = h \frac{5(1+e)^2}{9}$
- (b)  $h_M = h \frac{3(1+e)^2}{4}$
- (c)  $h_M = h \frac{g(1+e)^2}{4m}$
- (d)  $h_M = 2h(1+e)^2$
- (e)  $h_M = h \frac{(1-e)}{2}$



$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\frac{1}{2} 2m v_1^2 + (2m)gh = \frac{1}{2} 2m v_2^2 + 0 \Rightarrow v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh}$$

$$v'_3 = \frac{(1+e_2)(2m)}{2m+m} v_2 = \frac{2}{3} (1+e_2) \sqrt{v_1^2 + 2gh} = \frac{2(1+e)}{3} \sqrt{\frac{5}{2}gh}$$



$E_{kin} \rightarrow E_{pot}$

$$\frac{1}{2} v_3'^2 = gh_M \rightarrow h_M = \frac{1}{2g} \frac{4(1+e)^2}{9} \left( \frac{5}{2} gh \right)$$

$$= \frac{5(1+e)^2}{9} h$$

# Übung XXIII – Impulserhaltung

**1.8 (2 points)** Two particles  $A$  and  $B$  collide with equal and opposite velocities of magnitude  $v$  on a horizontal, frictionless plane. Assume here a perfectly elastic impact, i.e.,  $e = 1$ , where  $e$  is the coefficient of restitution. What is the ratio  $\frac{h_1}{h_2}$  between the heights reached by the two particles after the impact?

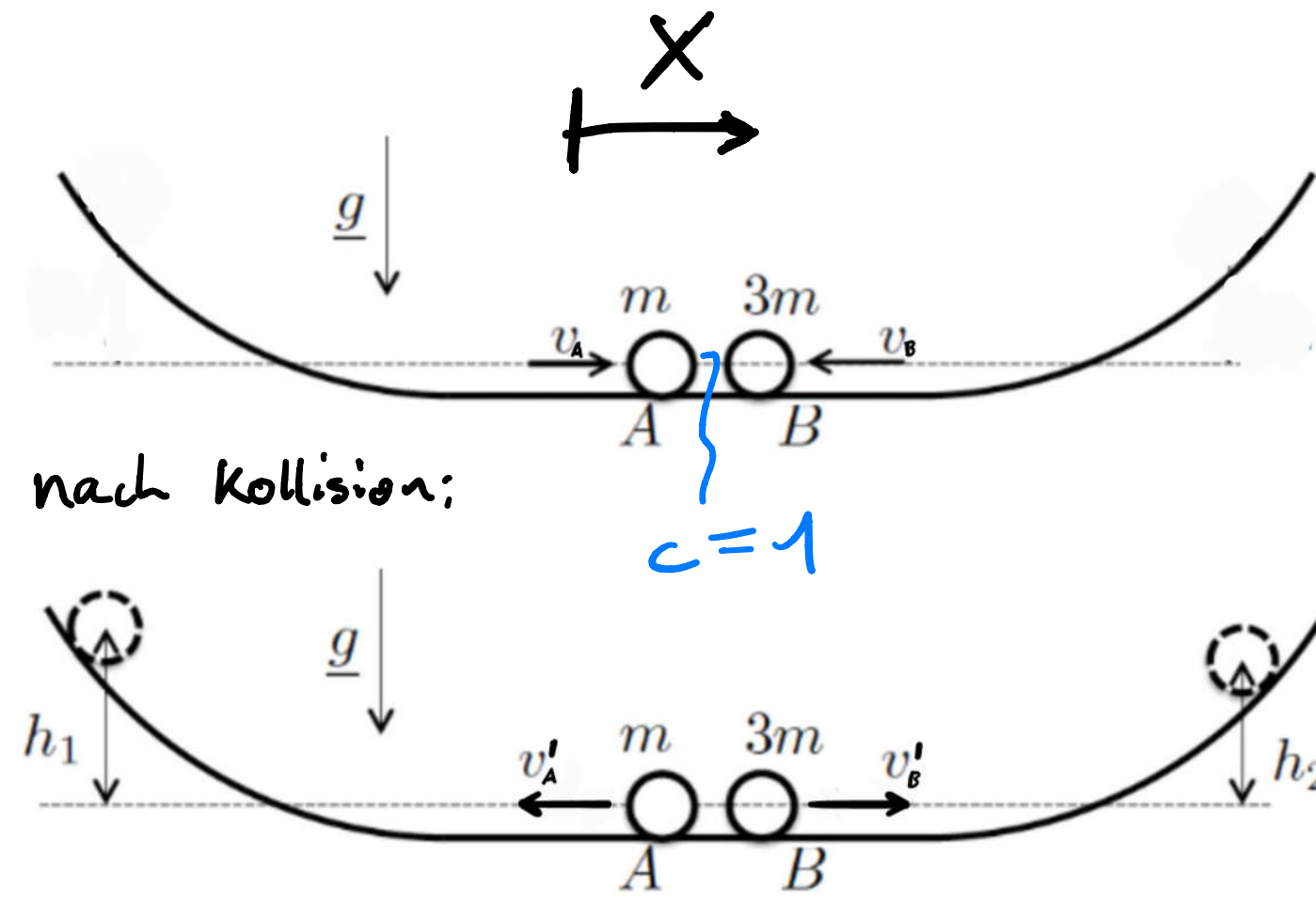
(a)  $\frac{h_1}{h_2} = 1$

(b)  $\frac{h_1}{h_2} = 0$

(c)  $\frac{h_1}{h_2} = \infty$

(d)  $\frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{2}$

(e) None of the above



$$v'_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 (v_1 - v_2) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 (v_2 - v_1) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta U = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 (1 - C_R^2)$$

$$C_R = \frac{v'_B - v'_A}{v_B - v_A}$$

ges:  $\frac{h_1}{h_2} = \frac{h_A}{h_B} = \frac{v_A'^2}{v_B'^2}$

ideal elastisch  $C = \frac{v'_B - v'_A}{v_B - v_A} = 1$

$$\Rightarrow v'_B - v'_A = v_B - v_A$$

$$v_A = v, v_B = -v \Rightarrow v'_B = v'_A - 2v \quad (1)$$

Impulserhaltung

$$mv - 3mv = mv'_A + 3mv'_B \quad (2)$$

$$(1) \rightarrow (2): v'_B = 0$$

$$v'_A = -2v$$

$$v'_B = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} - \frac{m_A (v_B - v_A)}{m_A + m_B}$$

$$= \frac{m v + 3m(-v)}{4m} - \frac{-v - v}{4}$$

$$= -v/2 - (-v/2) = 0$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{h_A}{0} \Rightarrow \infty$$

nicht definiert!

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 = m_A g h_A \quad \left| \quad \frac{1}{2} m_B v_B^2 = m_B g h_B \right.$$

$$v_A^2 = 2g h_A \quad \left| \quad 3 v_B^2 = 6g h_B \right.$$

$$h_A = \frac{v_A^2}{2g} \quad \left| \quad h_B = \frac{v_B^2}{2g} \Rightarrow h_A/h_B \right.$$



# Übung XXIV – Energieerhaltung

Zur Vorbereitung der Prüfungsendfeier rollt Alex ein Bierfass (Masse = 63.5 kg, Fasshöhe = 532 mm, Fassdurchmesser = 408 mm) von der Lastwagenladefläche (Höhe  $h = 1\text{m}$ ) über eine Rampe auf den Boden (Höhe = 0m) hinunter. Wie schnell ist die Translationsgeschwindigkeit des Fassschwerpunkts

am Boden, wenn die Winkelgeschwindigkeit auf der oberen Ladefläche konstant

betrug?

Nehmen Sie das Fass als homogenen Zylinder an. Trägheitsmoment eines Zylinders mit Masse

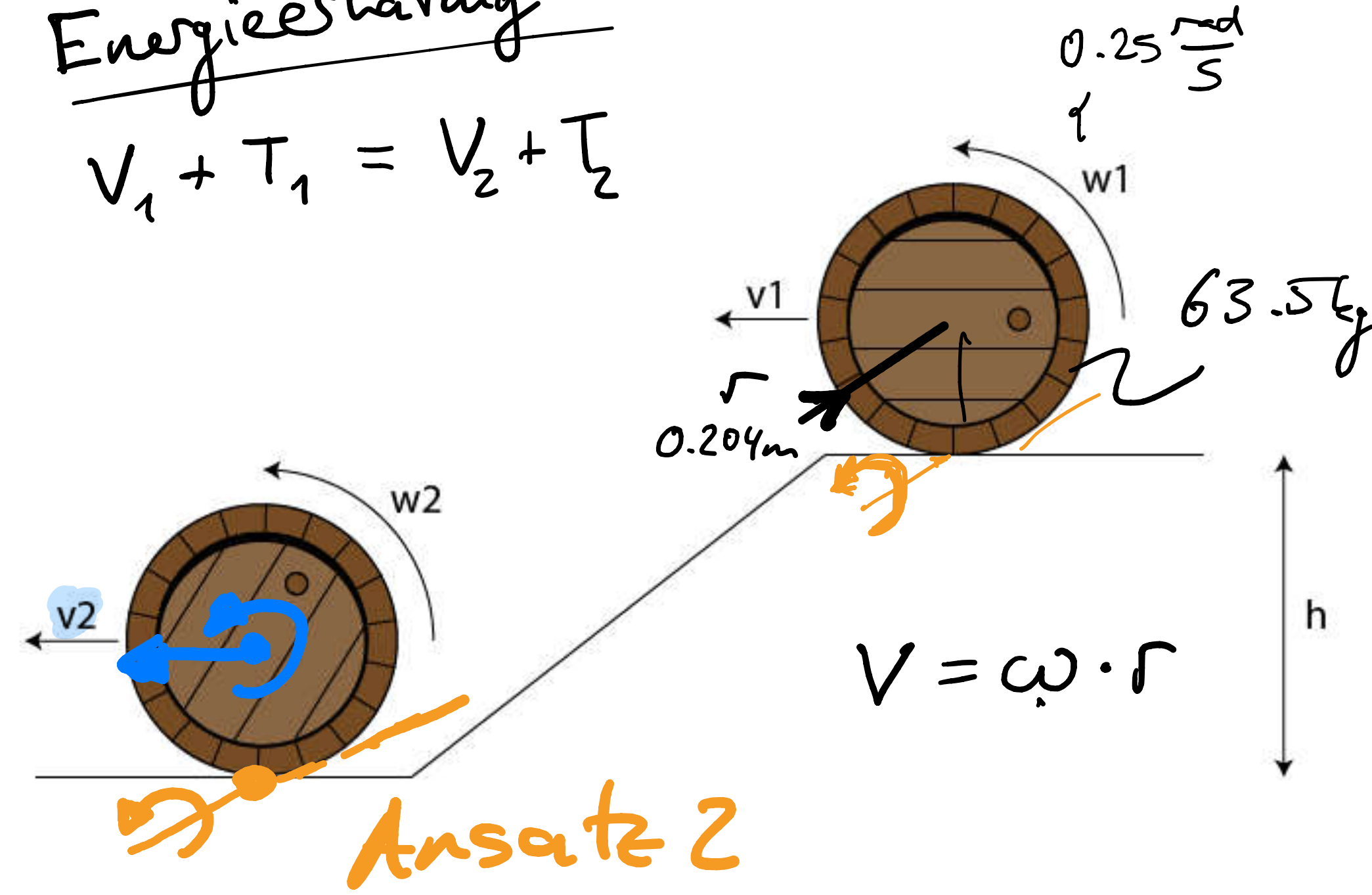
und Radius

um seine Symmetrieachse:

$$J = \frac{1}{2}mR^2$$

Energieerhaltung

$$V_1 + T_1 = V_2 + T_2$$



Ansatz 1

$$mgh + \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}J\omega_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}J\omega_2^2$$

$$mgh + \frac{1}{2}m\omega_1^2 r^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m r^2 \omega_1^2 = m r^2 \omega_2^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right)$$

$$\omega_2^2 = \frac{2gh + \frac{1}{2}\omega_1^2 r^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2} r^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\omega_2 r = \sqrt{\frac{gh \cdot 4}{3} + \omega_1^2 r^2} = v_2 = \underline{\underline{3.6 \frac{m}{s}}}$$

Ansatz 2

$$2mgh + \frac{1}{2}J_{o,w}\omega_1^2 = \frac{1}{2}J_{o,w}\omega_2^2$$

$$J_{o,w} ? \rightarrow J_{o,w} = J_o + m r^2 = \frac{1}{2}m r^2 + m r^2 = \frac{3}{2}m r^2$$

$$\omega_2^2 = \frac{2mgh}{\frac{3}{2}m r^2} + \omega_1^2$$

$$\omega_2 \cdot r = \sqrt{\frac{4}{3}gh + \omega_1^2 r^2} = v_2 = \underline{\underline{3.6 \frac{m}{s}}}$$

# Übung XXV – Energieerhaltung

Sie schnippen eine Münze mit ihrem Daumen senkrecht in die Luft. Sobald die Münze den Daumen verlassen hat (kein Kontakt mehr) erreicht sie eine zusätzliche Maximalhöhe  $x$  bevor sie wieder zu Boden fällt. Dabei rotiert sie gleichförmig mit  $\omega = 6\text{rad/s}$  und gleichbleibender Rotationsachse. Berechnen Sie die durchschnittlich wirkende Kraft während der Interaktion, wenn die Interaktion zwischen Daumen und Münze über eine Distanz von  $x = 3\text{cm}$  stattfindet.

Nehmen Sie die Bewegung der Münze, die Bewegung des Daumens, und die Interaktionskraft als rein vertikal an.

Maximalhöhe  $x = 30\text{cm}$

Masse der Münze =  $4\text{g}$

Trägheitsmoment der Münze um die Rotationsachse =  $1.44 \cdot 10^{-7}\text{kg m}^2$

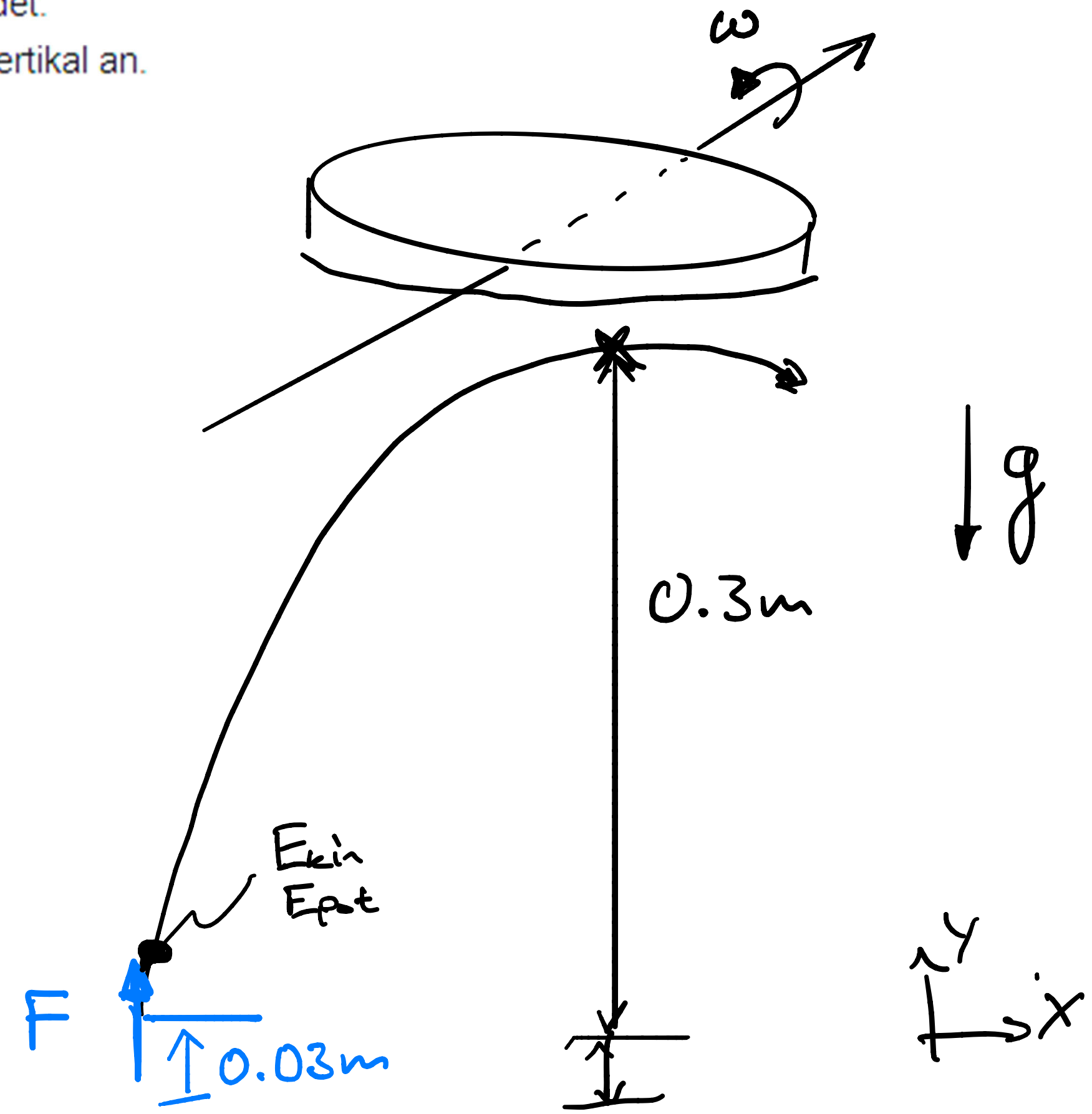
ges:  $F$

$$T + V + W = 0$$

$$mgh + \frac{1}{2}J\omega^2 + \cancel{E_{\text{trans}}} = + \int F \cdot ds$$

$$mgh + \frac{1}{2}J\omega^2 = F \cdot 0.03\text{m}$$

$$\frac{0.004\text{kg} \cdot 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} (0.3 + 0.03)\text{m} + 18\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\text{J}}{0.03\text{m}} = F = \underline{\underline{0.4316\text{N}}}$$



# Energieerhaltung

$$E_{\text{pot}} = - \int \underline{F} \cdot d\underline{s}$$

$$\Rightarrow mgh$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

V, W

$$E_{\text{trans.}} = \int \underline{P} \cdot d\underline{v}$$
$$= \frac{1}{2} m v^2$$

T

$$E_{\text{rot}} = \int \underline{L} \cdot d\underline{\omega}$$
$$= \frac{1}{2} J \omega^2$$

T

$$E_{\text{pot, } \phi} = - \int \underline{M} \cdot d\underline{\phi}$$
$$= M \phi$$

✓

$$\int \underline{F}_F \cdot d\underline{x} \rightarrow \int kx dx$$

# Lagrange

$$T = E_{\text{kin}}$$
$$V = E_{\text{pot}}$$

Lagrange-Formalismus

$$L = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = 0$$

Holonomic constraints

→ 1 Gleichung pro  $q_k$

→  $q, \dot{q}$

variable  
t  
z.B. x  
y  
z

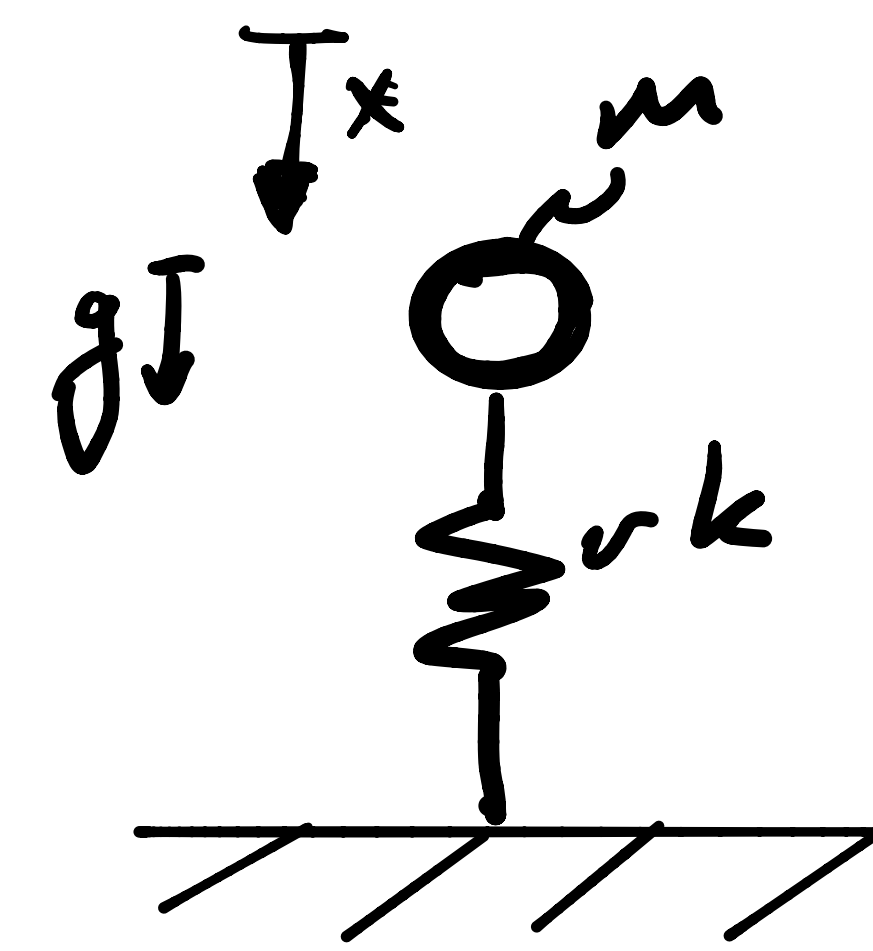
⇒ Nur Ableiten, dann Kprim

# Übung XXVI – Lagrange

$$L = T - V, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = 0$$

$$E_{\text{pot}, F} = \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

Das Abfedern des Körpers beim Gehen kann in erster Näherung als eine mathematisches Feder mit der Federkonstante  $k$ , der Masse  $m$  und Auslenkung  $x$  beschrieben werden. Bewerten Sie ob folgendene Funktionen gültige Lagrange-Funktionen für dieses Problem sind:

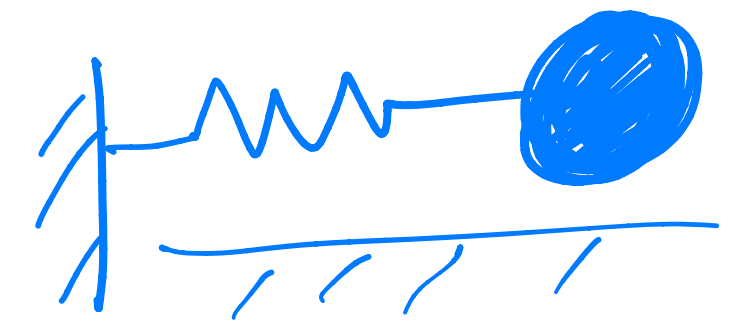


✓ *Energie [J]*  
 $L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 + 3mk\dot{x}(t)$  *~ Dämpfung*

✓  $L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k - \frac{1}{2} k x^2$   $\frac{\partial(-\frac{1}{2}kt)}{\partial t}$

✗  $L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m x^2 \dot{x}^2 + mk$

✓  $L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$



$$L = \overbrace{E_{\text{trans}} + E_{\text{rot}}}^T - \overbrace{E_{\text{pot}}}^V$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 - mg(-x)$$

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 + mgx + \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$$

$\swarrow$   $\searrow$   
 $k, 2kt$   $k\dot{x}$

In diesem Modell wurde  $F_g$  vernachlässigt

# Wann Newton-Euler/Impuls oder Energie (Lagrange)?

$$\ddot{x} = \sum_i F_i$$

Newton-Euler/Impuls

Energie / Arbeit

- Bewegungen mit  $\mu$ , Verluste
- Stösse
- Beschleunigung, Zeit
- Zentripetalkraft

- Energieerhaltung
- Kompression Feder / W
- Höhe / Weg
- Schnelligkeit  $|v|$

Kräfte

⇒ Immer Anwendbar

Lagrange  $\left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0 \right)$

# Inverse dynamische Analyse

## Lagrange-Formalismus

$$L = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = 0$$

## Energie des Mehrkörpersystems

mit  $W$  als Leistung

$$W_{M, \text{aktiv}} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$W_{R, \text{passiv}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$$

$$\frac{\Delta E_s}{\Delta t} = \sum_i W_{R,i} + \sum_j W_{M,j} - \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

## Inverse dynamische Analyse

mit  $R$  als Reaktionskräfte

$$2D: J_0 \alpha = M_{zp} + M_{zd} + \sum_i (R_{x,i} \cdot l_{x,i} + R_{y,i} \cdot l_{y,i})$$

## Euler-Gleichungen

Für rotierende Starrkörpersysteme:

$$F_x = m \left( \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y \right)$$

$$F_y = m \left( \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z \right)$$

$$F_z = m \left( \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x \right)$$

$$M_x = J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z$$

$$M_y = J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x$$

$$M_z = J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y$$

## Muskelmechanik

Hillmodell, mit Muskelkraft  $F$

$$F(v) = F_0 - (F_0 + a) \frac{v}{v+b} = \frac{F_0 b - av}{v+b}$$

$$L(v) = v F(v)$$

$$\dot{Q}(v) = \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{F(v)}{F_0} \right) (v+b)$$

Huxleymodell:

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = f(x)[1 - n(x,t)] - g(x) \cdot n(x,t) - v(t) \cdot n'(x,t)$$

$$\bar{n}(x) = \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} \quad \text{isometrisch}$$

## Muskeloptimierung

$$J = \psi(F_1, F_2, \dots, F_N) - \lambda (M_{tot} - \sum_{i=1}^N h_i \cdot F_i)$$

## Harmonischer Oszillator

$$m\ddot{y} = -ky + mg$$

$$y(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + \frac{g}{\omega^2}$$

## Übergang Laufen-Gehen

$$r(t) = l_0 + \frac{r_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2} (\cos(\omega t) - 1)$$

$$\Delta l_{hor} = l_0 (1 - \sin(\alpha_0))$$

## Hilfsgleichungen

Quadratische Lösungsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sinus- und Kosinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

# Inverse Dynamics

$A^{-1}$

Herleitung der Kräfte,  
welche für Bewegungen  
verantwortlich sind

## Inverse dynamische Analyse mit $R$ als Reaktionskräfte

$$2D: J_0 \alpha = M_{zp} + M_{zd} + \sum_i (R_{x,i} \cdot l_{x,i} + R_{y,i} \cdot l_{y,i})$$

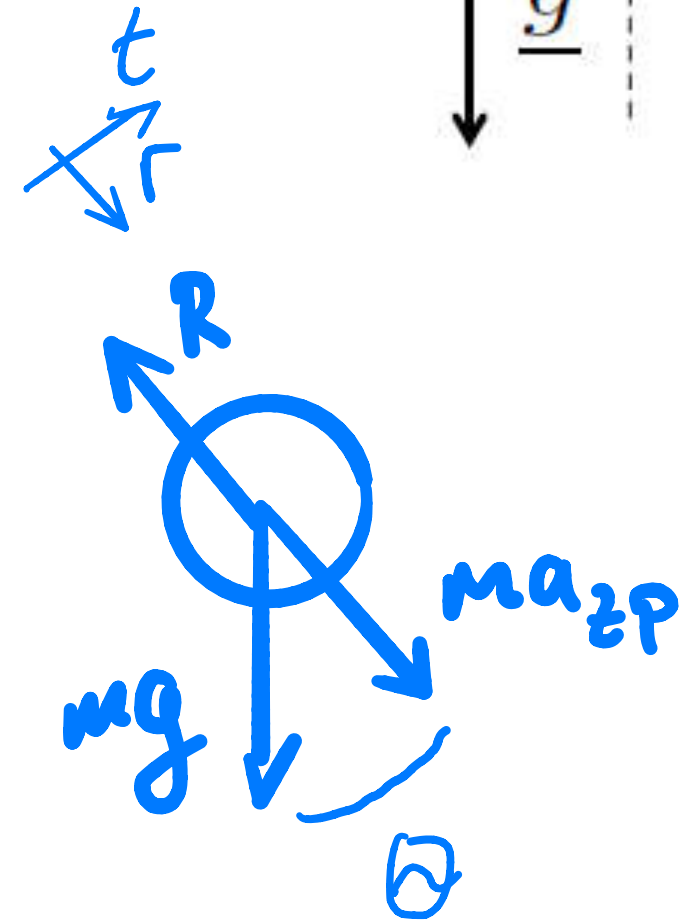
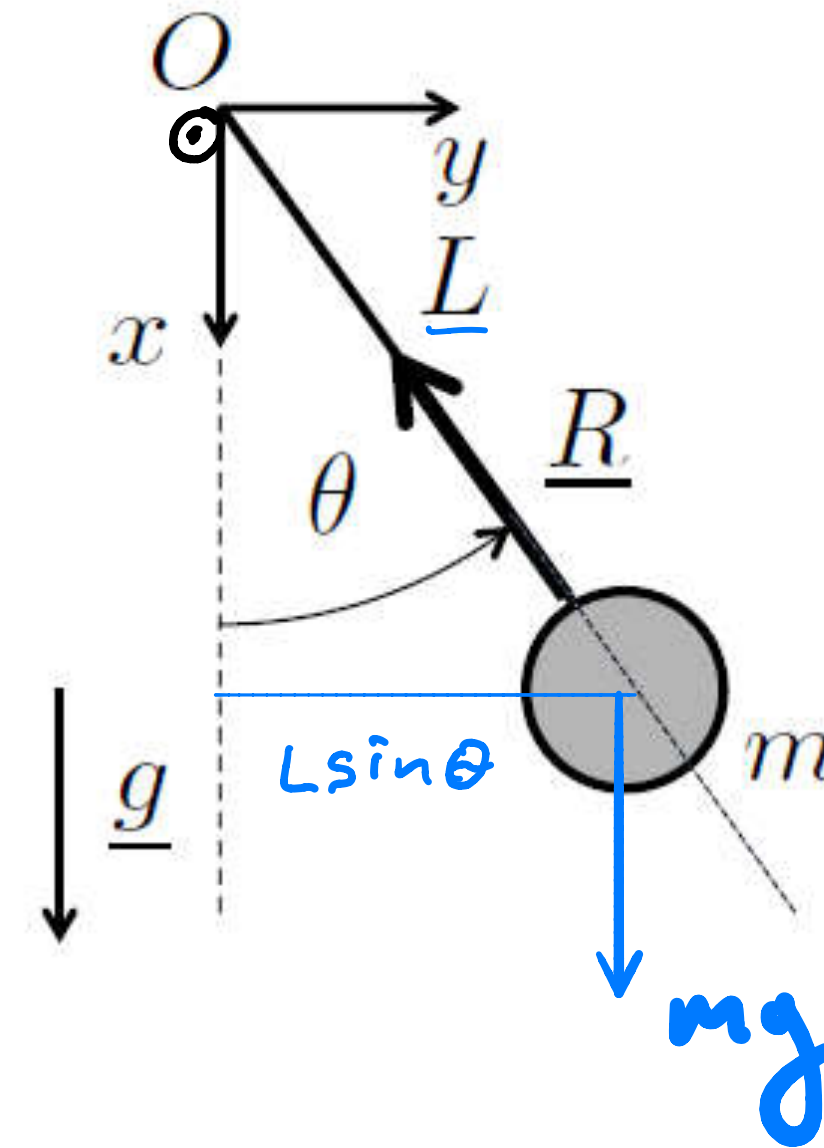
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$$



# Übung XXVII – Inverse Dynamics

1.12 (2 points) The pendulum shown in the figure swings on a vertical plane. Denote by  $R$  the magnitude of the constraint force  $\underline{R}$ . Which of the following statements is correct?

- $R = mg \cos \theta$  always. ✓ statisch
  - $R > mg \cos \theta$  always. ~ dynamisch
  - $R < mg \cos \theta$  always. ~ falsch
  - (d)  $R$  depends on the motion  $\theta(t)$ . ✓
- $R \geq mg \cos \theta$



$$m\ddot{x} = \sum F_i$$

$$J\alpha = J\ddot{\theta} = \sum_i M_i$$

Trägheitssmom.  $mr^2 = J$

$$= -L \sin \theta \cdot mg$$

$$\hookrightarrow mL^2 \ddot{\theta} = -L \sin \theta mg$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{\sin \theta}{L} g$$

$$\ddot{\theta} \uparrow \uparrow \rightarrow L \downarrow \downarrow$$

$$\rightarrow g \uparrow \uparrow$$

$$J\ddot{\theta} = \sum M_i$$

$$m\ddot{r} = -R + ma_{zp} + \cos \theta mg$$

$$0 - R + ma_{zp} + \cos \theta mg = 0$$

$$R = \cos \theta mg + m\dot{\theta}^2 L$$

# Übung XXVIII – Inverse Dynamics

$$J\ddot{\alpha} = \sum_i M_i$$

Write down the differential equation that governs the motion of the seesaw. You can derive it from either Newtonian mechanics or energy conservation principles. Assume that propellers generate forces  $F_1$  and  $F_2$ .

$$\begin{aligned} J\ddot{\alpha} &= \sum_i M_i \\ &= -F_1 L + F_2 L - l_w \cos\alpha m_w g \\ &= L(F_2 - F_1) - l_w \cos\alpha m_w g \end{aligned}$$

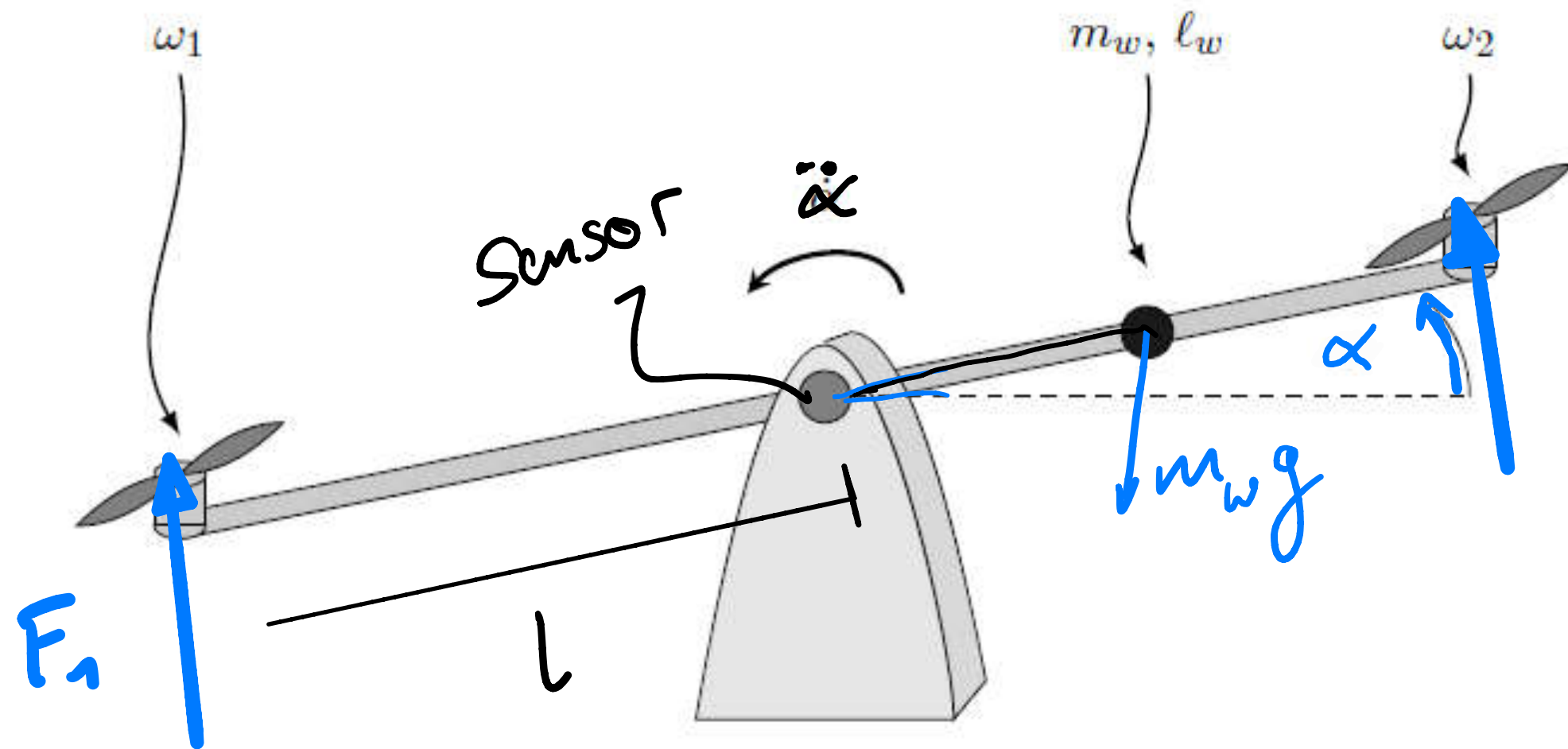
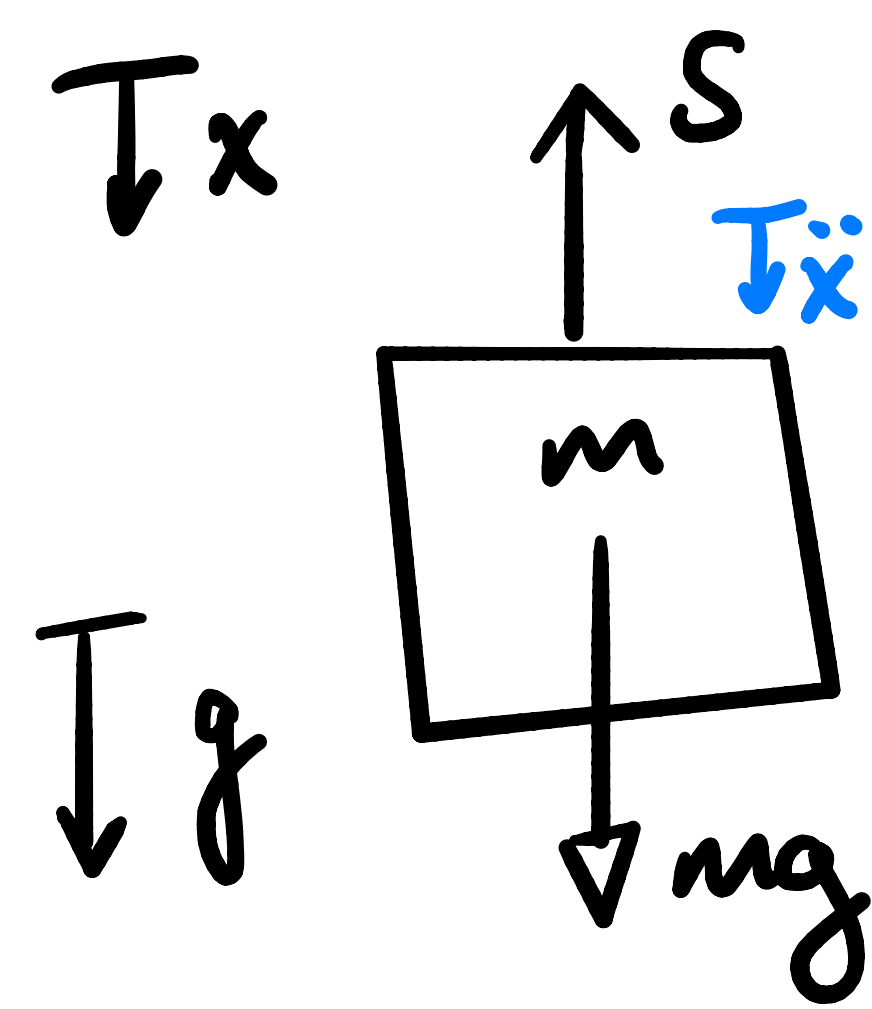
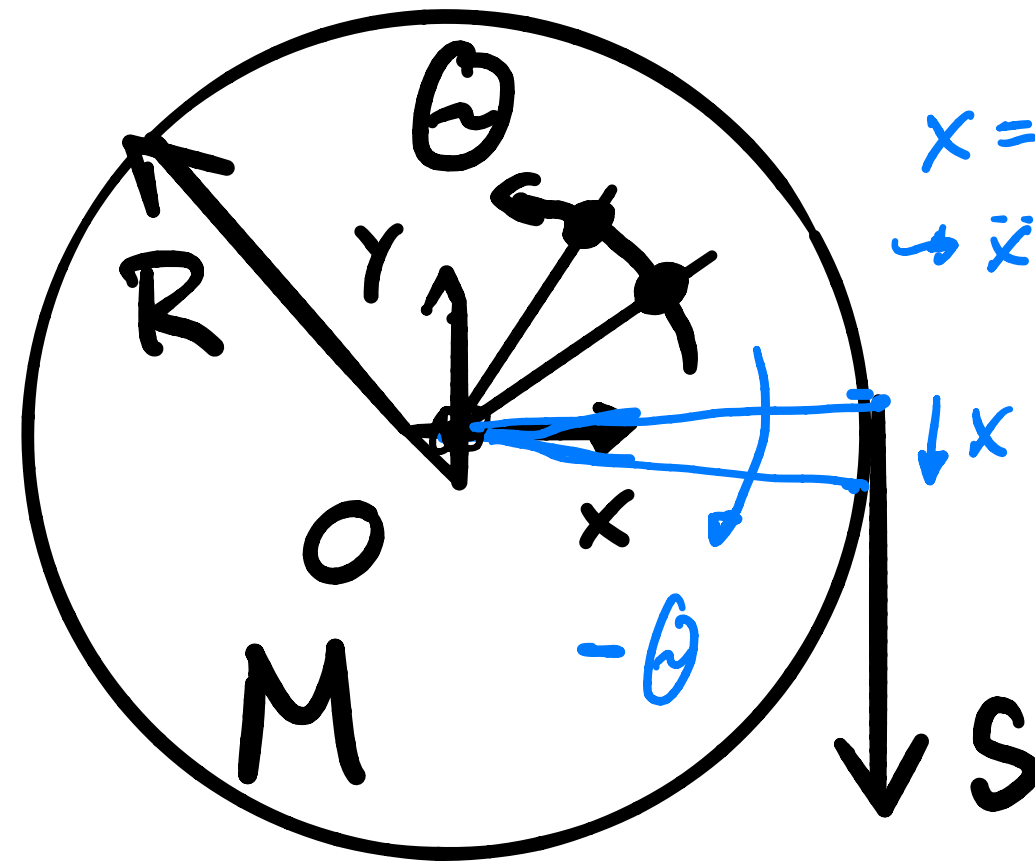
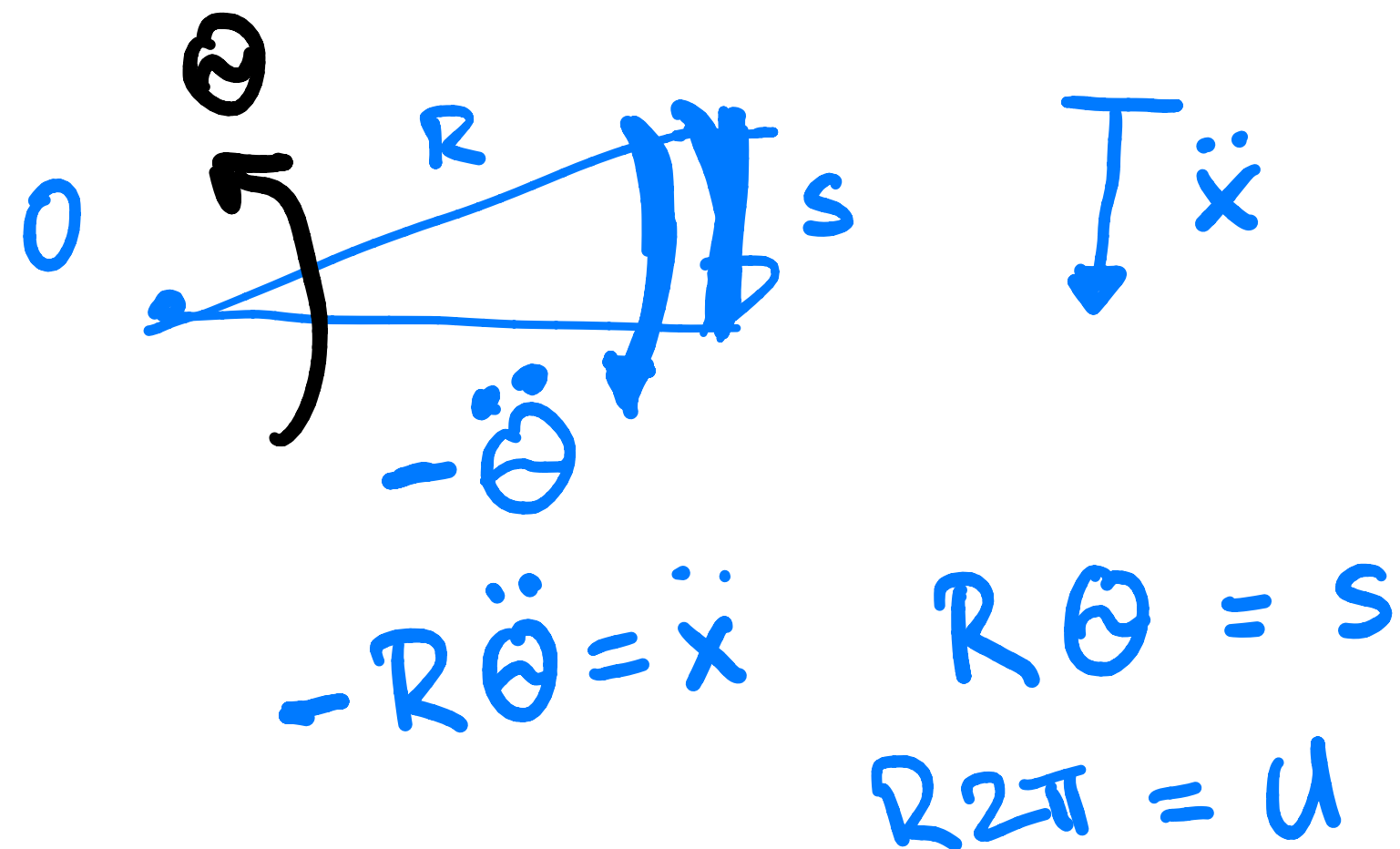
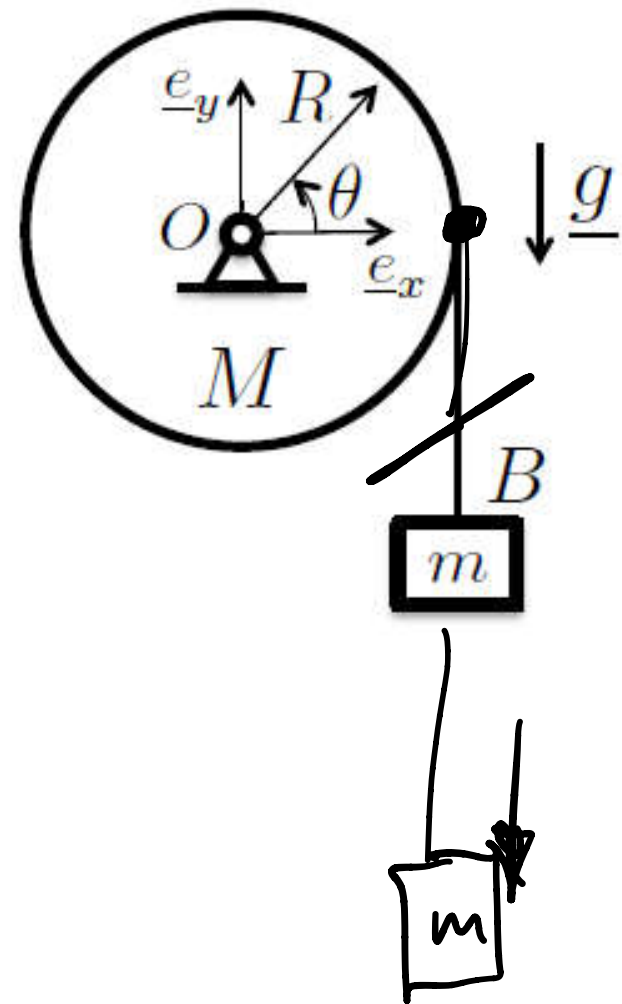


Figure 1: Seesaw with attached weight with mass  $m_w$  and distance from center  $l_w$

# Übung XXIX – Inverse Dynamics

A disk of mass  $M$  and radius  $R$  is free to rotate about its center of mass  $O$ , as shown in the figure. A cable connected to the block  $B$  of mass  $m$  is wound tightly around the disk. Assume that the mass of the cable is negligible. The centroidal moment of inertia of a disk of radius  $R$  and mass  $M$  is  $I = \frac{1}{2}MR^2$ . Which of the following equations of motion is correct?

- (a)  $\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta} + mgR \cos \theta = 0$
- (b)  $(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2)\ddot{\theta} + mgR = 0$
- (c)  $(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2)\ddot{\theta} + mgR(1 + \cos \theta) = 0$
- (d)  $\frac{1}{2}MR^2 + mR\ddot{\theta} - mgR(1 + \cos \theta) = 0$
- (e)  $\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} + mgR = 0$



$$J\alpha = J\ddot{\theta} = -SR$$

$$m\ddot{x} = -S + mg$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(\ddot{\theta})?$$

$$\ddot{x} = -\ddot{\theta}R$$

$$\hookrightarrow m(-\ddot{\theta}R) = -S + mg$$

$$\rightarrow m\ddot{\theta}R = \frac{J}{R}\ddot{\theta} + mg$$

$$\hookrightarrow \ddot{\theta}(J + mR^2) + mgR = 0$$

$$J = \frac{1}{2}MR^2$$

Verschiebungstem  
 aka. Satz v. Steiner

# Energie des Mehrkörpersystems

## Lagrange-Formalismus

$$L = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = 0$$

## Energie des Mehrkörpersystems

mit  $W$  als Leistung

$$W_{M, \text{aktiv}} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$W_{R, \text{passiv}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$$

$$\frac{\Delta E_s}{\Delta t} = \sum_i W_{R,i} + \sum_j W_{M,j} - \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

## Inverse dynamische Analyse

mit  $R$  als Reaktionskräfte

$$2D: J_0 \alpha = M_{zp} + M_{zd} + \sum_i (R_{x,i} \cdot l_{x,i} + R_{y,i} \cdot l_{y,i})$$

## Euler-Gleichungen

Für rotierende Starrkörpersysteme:

$$F_x = m \left( \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y \right)$$

$$F_y = m \left( \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z \right)$$

$$F_z = m \left( \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x \right)$$

$$M_x = J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z$$

$$M_y = J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x$$

$$M_z = J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y$$

## Muskelmechanik

Hillmodell, mit Muskelkraft  $F$

$$F(v) = F_0 - (F_0 + a) \frac{v}{v+b} = \frac{F_0 b - av}{v+b}$$

$$L(v) = vF(v)$$

$$\dot{Q}(v) = \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{F(v)}{F_0} \right) (v+b)$$

Huxleymodell:

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = f(x)[1 - n(x,t)] - g(x) \cdot n(x,t) - v(t) \cdot n'(x,t)$$

$$\bar{n}(x) = \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} \quad \text{isometrisch}$$

## Muskeloptimierung

$$J = \psi(F_1, F_2, \dots, F_N) - \lambda (M_{tot} - \sum_{i=1}^N h_i \cdot F_i)$$

## Harmonischer Oszillator

$$m\ddot{y} = -ky + mg$$

$$y(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + \frac{g}{\omega^2}$$

## Übergang Laufen-Gehen

$$r(t) = l_0 + \frac{r_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2} (\cos(\omega t) - 1)$$

$$\Delta l_{hor} = l_0 (1 - \sin(\alpha_0))$$

## Hilfsgleichungen

Quadratische Lösungsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sinus- und Kosinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

# Energiefluss

## Energie des Mehrkörpersystems

mit  $W$  als Leistung  $\rightarrow \frac{\text{Arbeit}}{s} [\text{J/s}] \sim \text{Moment}$

$$W_{M,\text{aktiv}} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$W_{R,\text{passiv}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$$

$\sim$  Skalarprodukt

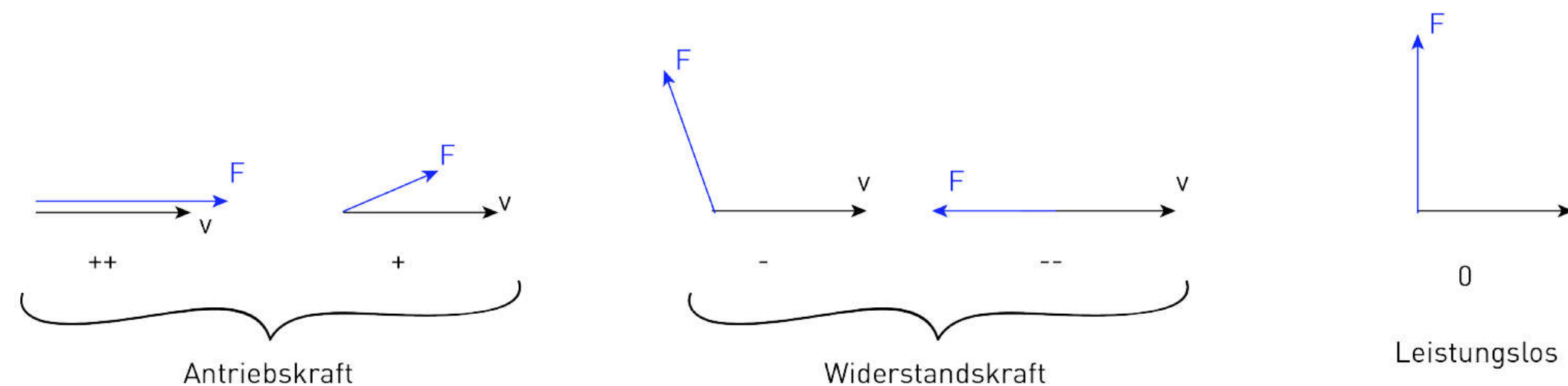
$$\frac{\Delta E_s}{\Delta t} = \sum_i^2 W_{R,i} + \sum_j^N W_{M,j} - \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

$\sim$  Kraft

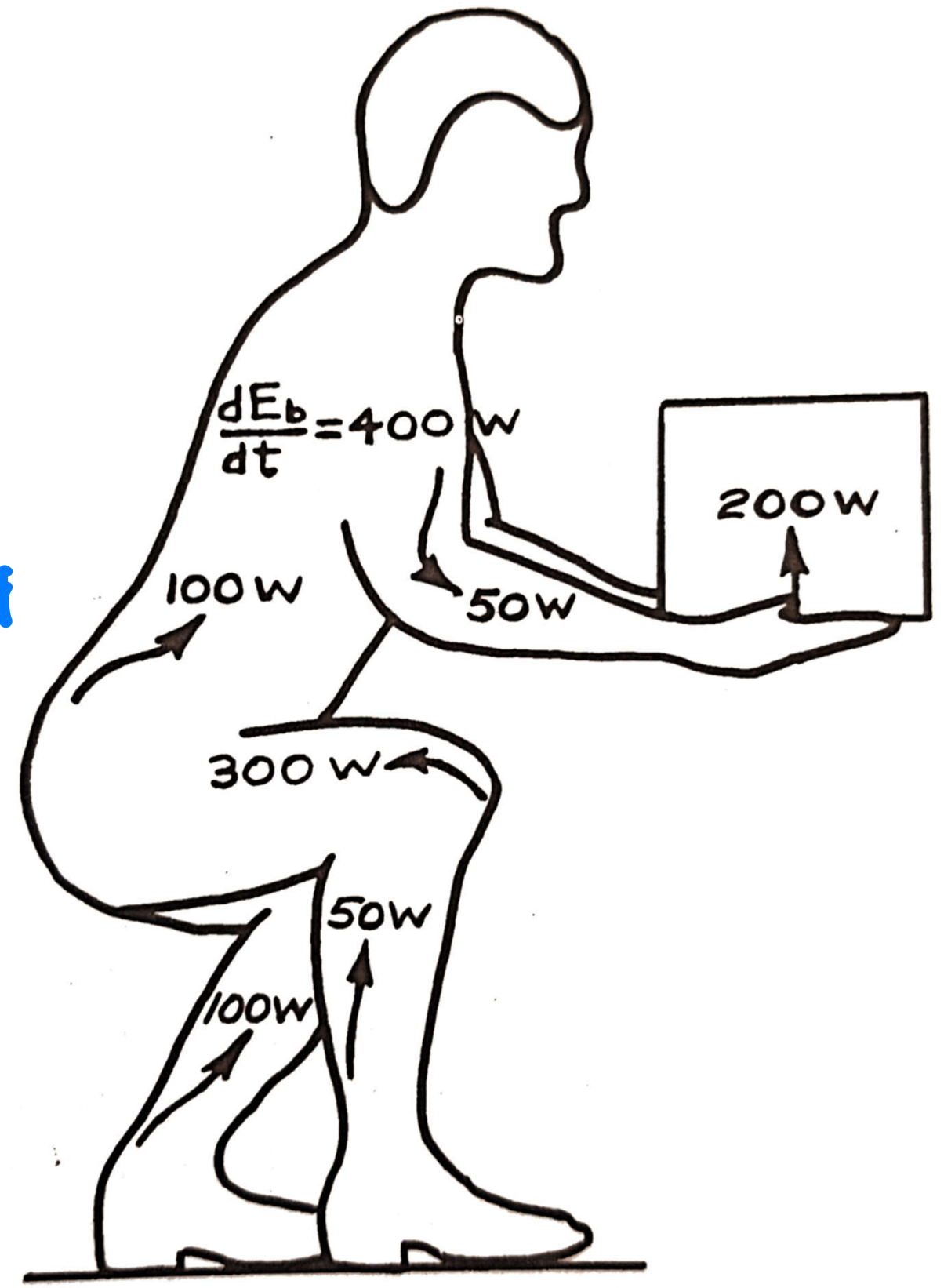
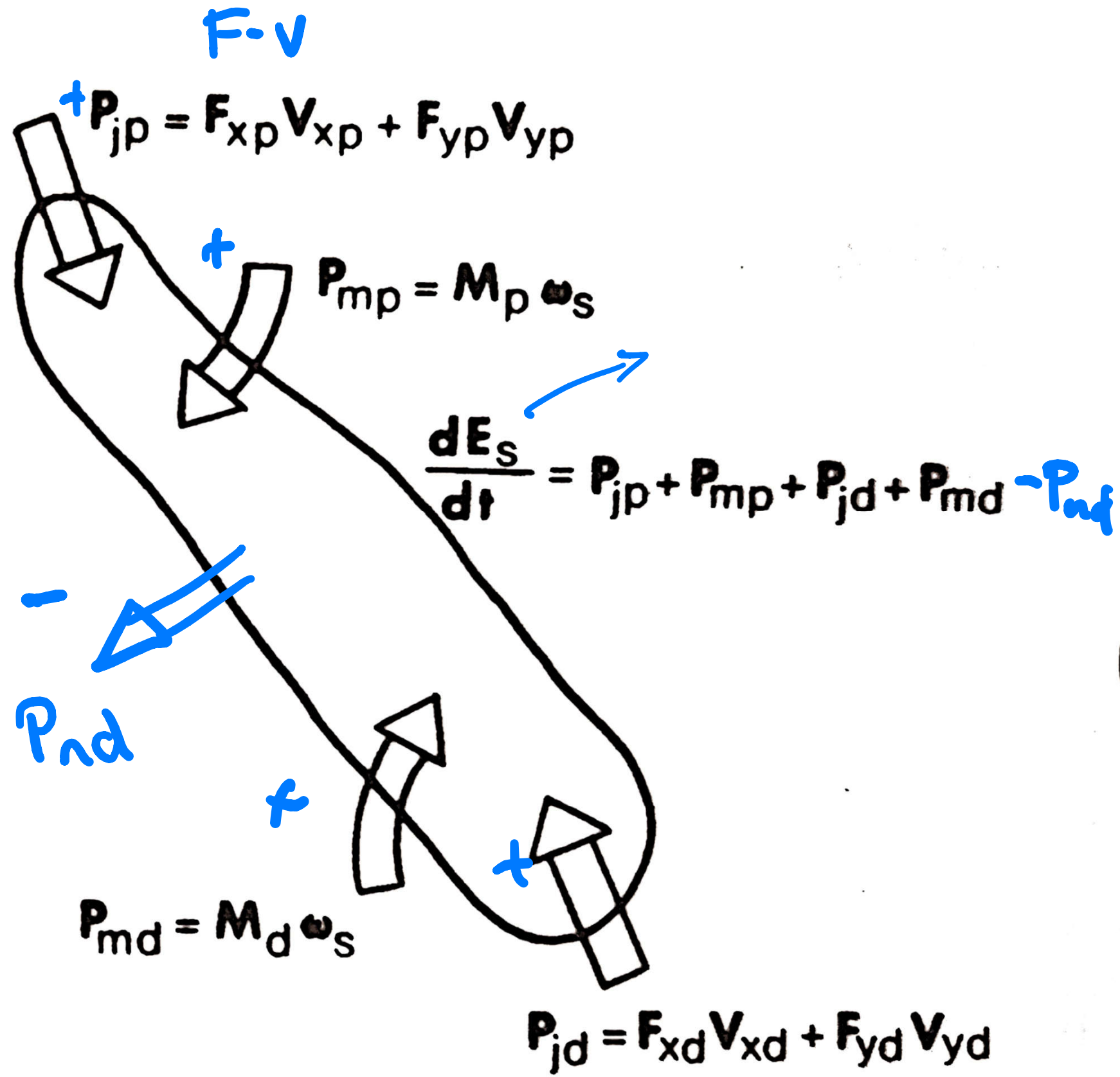
$$\Leftrightarrow \Delta W = \sum_{\text{in}} W_{\text{in}} - \sum_{\text{out}} W_{\text{out}}$$

$\Delta W < 0$  : Energie wird verrichtet

$$\eta = \frac{\text{nutzbare Leistung o. Energie}}{\text{gesamte Leistung o. Energie}} < 1$$



# Energiefluss



# Harmonischer Oszillator

## Lagrange-Formalismus

$$L = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = 0$$

## Energie des Mehrkörpersystems

mit  $W$  als Leistung

$$W_{M, \text{aktiv}} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$W_{R, \text{passiv}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$$

$$\frac{\Delta E_s}{\Delta t} = \sum_i^2 W_{R,i} + \sum_j^N W_{M,j} - \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

## Inverse dynamische Analyse

mit  $R$  als Reaktionskräfte

$$2D: J_0 \alpha = M_{zp} + M_{zd} + \sum_i (R_{x,i} \cdot l_{x,i} + R_{y,i} \cdot l_{y,i})$$

## Euler-Gleichungen

Für rotierende Starrkörpersysteme:

$$F_x = m \left( \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y \right)$$

$$F_y = m \left( \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z \right)$$

$$F_z = m \left( \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x \right)$$

$$M_x = J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z$$

$$M_y = J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x$$

$$M_z = J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y$$

## Muskelmechanik

Hillmodell, mit Muskelkraft  $F$

$$F(v) = F_0 - (F_0 + a) \frac{v}{v+b} = \frac{F_0 b - av}{v+b}$$

$$L(v) = vF(v)$$

$$\dot{Q}(v) = \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{F(v)}{F_0} \right) (v+b)$$

Huxleymodell:

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = f(x)[1 - n(x,t)] - g(x) \cdot n(x,t) - v(t) \cdot n'(x,t)$$

$$\bar{n}(x) = \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} \quad \text{isometrisch}$$

## Muskeloptimierung

$$J = \psi(F_1, F_2, \dots, F_N) - \lambda (M_{\text{tot}} - \sum_{i=1}^N h_i \cdot F_i)$$

## Harmonischer Oszillator

$$m\ddot{y} = -ky + mg$$

$$y(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + \frac{g}{\omega^2}$$

## Übergang Laufen-Gehen

$$r(t) = l_0 + \frac{r_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2} (\cos(\omega t) - 1)$$

$$\Delta l_{\text{hor}} = l_0 (1 - \sin(\alpha_0))$$

## Hilfsgleichungen

Quadratische Lösungsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies$$

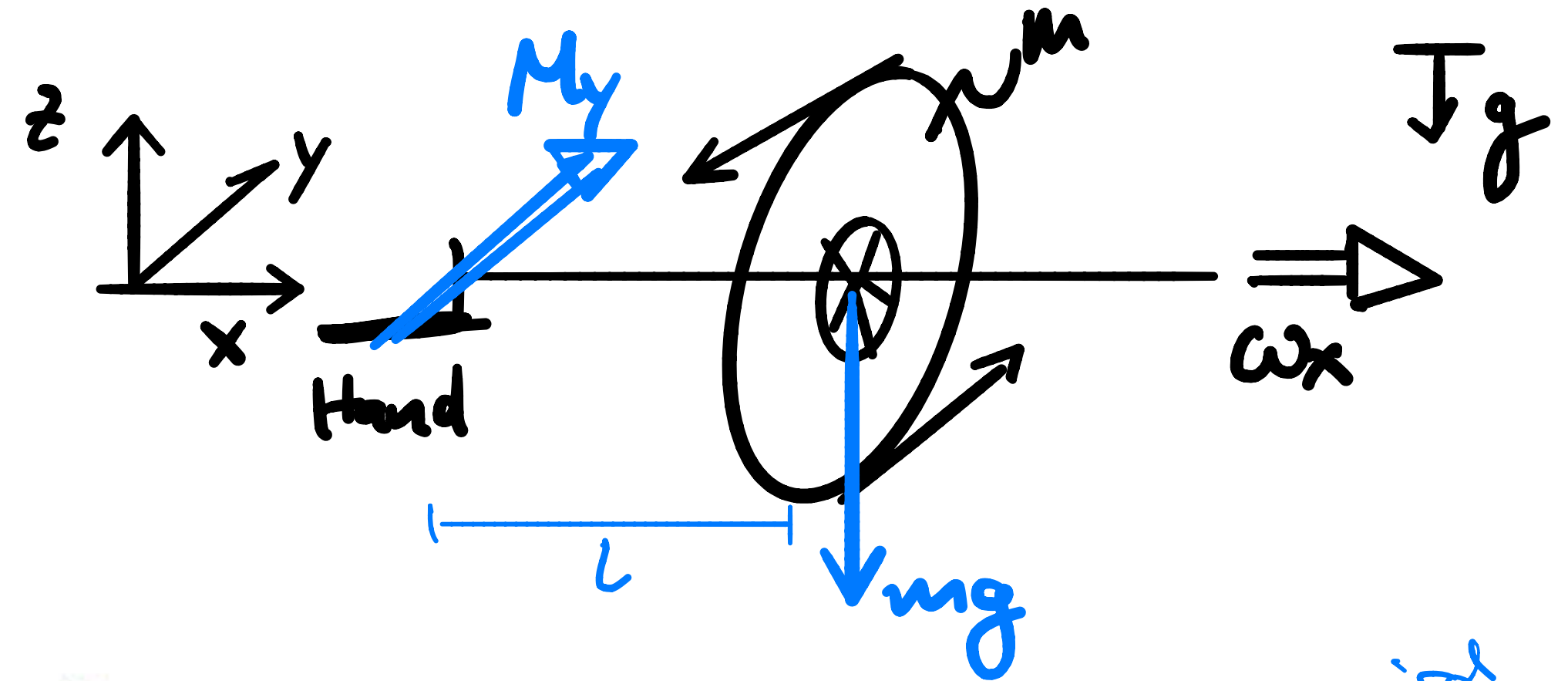
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sinus- und Kosinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin c}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

# Euler



## Euler-Gleichungen

Für rotierende Starrkörpersysteme:

$$\sum F_x = m \left( \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y \right)$$

$$\sum F_y = m \left( \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z \right)$$

$$\sum F_z = m \left( \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x \right)$$

$$\sum M_x = J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z$$

$$\sum M_y = J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x$$

$$\sum M_z = J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y$$

$$\underline{L} = \underline{J} \cdot \underline{\omega}$$

$$M_x = 0$$

$$M_y = mgl = J_y \frac{d\omega_y}{dt} + \cancel{(J_x - J_z) \omega_z \omega_x}$$

$$M_z = 0$$

$L_y$  wird sich verändern

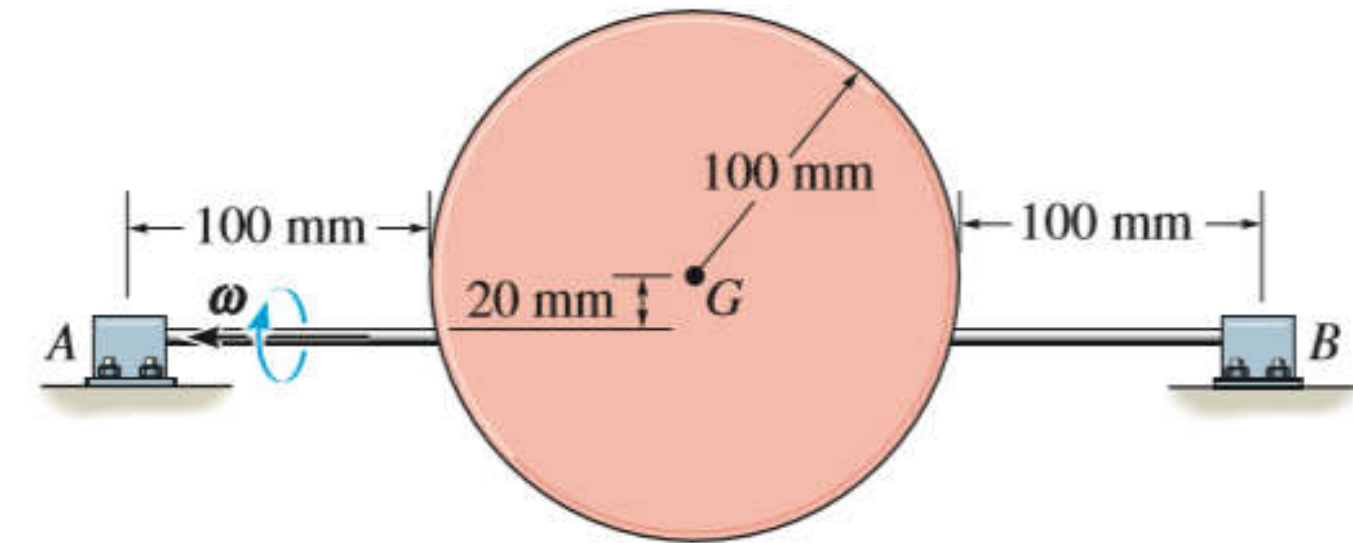
<https://www.youtube.com/watch?v=NeXIV-wMVUk>

<https://n.ethz.ch/~stiegerc/HS09/Mechanik/Unterlagen/Lecture19.pdf>



# Übung XXX – Euler

The 5-kg circular disk is mounted off center on a shaft which is supported by bearings at A and B. If the shaft is rotating at a constant rate of  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ , determine the vertical reactions at the bearings when the disk is in the position shown.



$$\omega_x = 0, \omega_y = -10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \omega_z = 0$$

$$\dot{\omega}_x = 0, \dot{\omega}_y = 0, \dot{\omega}_z = 0$$

$$\sum M_x = -0.2F_A + 0.2F_B = J_x \dot{\omega}_x - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z$$

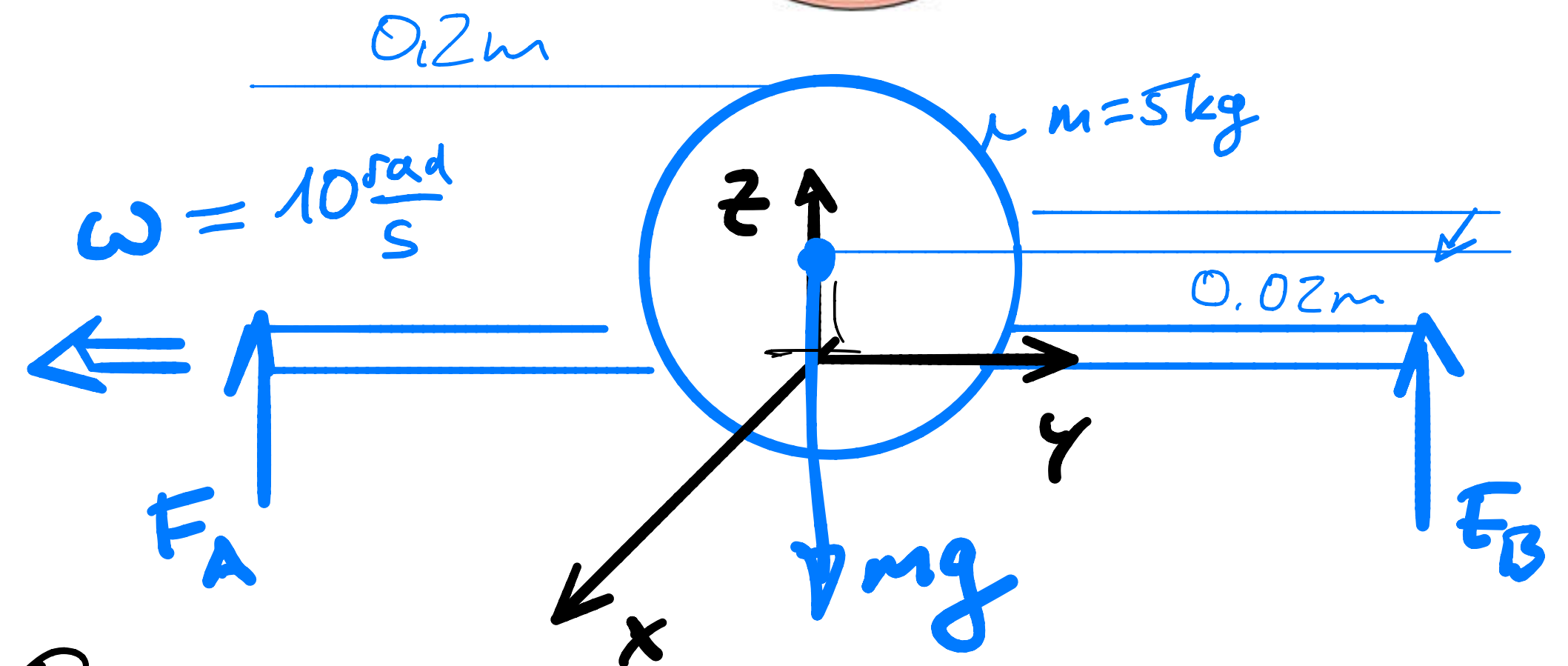
$$\Rightarrow F_A = F_B$$

$$\sum M_y = 0 = 0 \quad \left| \quad \sum F_x = 0 = 0$$

$$\sum M_z = 0 = 0 \quad \left| \quad \sum F_y = 0 = 0$$

$$\sum F_z = -mg + F_A + F_B = m\ddot{z} + \omega_x v_{ym} - \omega_y \dot{z} m$$

$$-mg + 2F_A = -(\omega_y^2) \Delta x \cdot m \Rightarrow F_A = F_B = \frac{m}{2} (g - \omega_y^2 (0.02 \text{ m}))$$



# Harmonischer Oszillator

$$\frac{k}{m} = \omega^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Radians!!

$$m\ddot{y} = -ky + mg$$

$$y(t) = \underbrace{A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t}_{Y_h} + \underbrace{\frac{g}{\omega^2}}_{Y_p}$$

$Y_h :=$  Interne Kraft

$Y_p :=$  Externe Kraft  
z.B. Gewichtskraft

Randbedingungen einsetzen: ...

$$y(t=0) = \dots, \quad y(t=t_i) = \dots$$

$$\frac{dy}{dt} y(t=0) = \dots, \quad \dot{y}(t=t_i) = \dots$$

... und nach unbekannte Größe auflösen!

# Harmonischer Oszillator

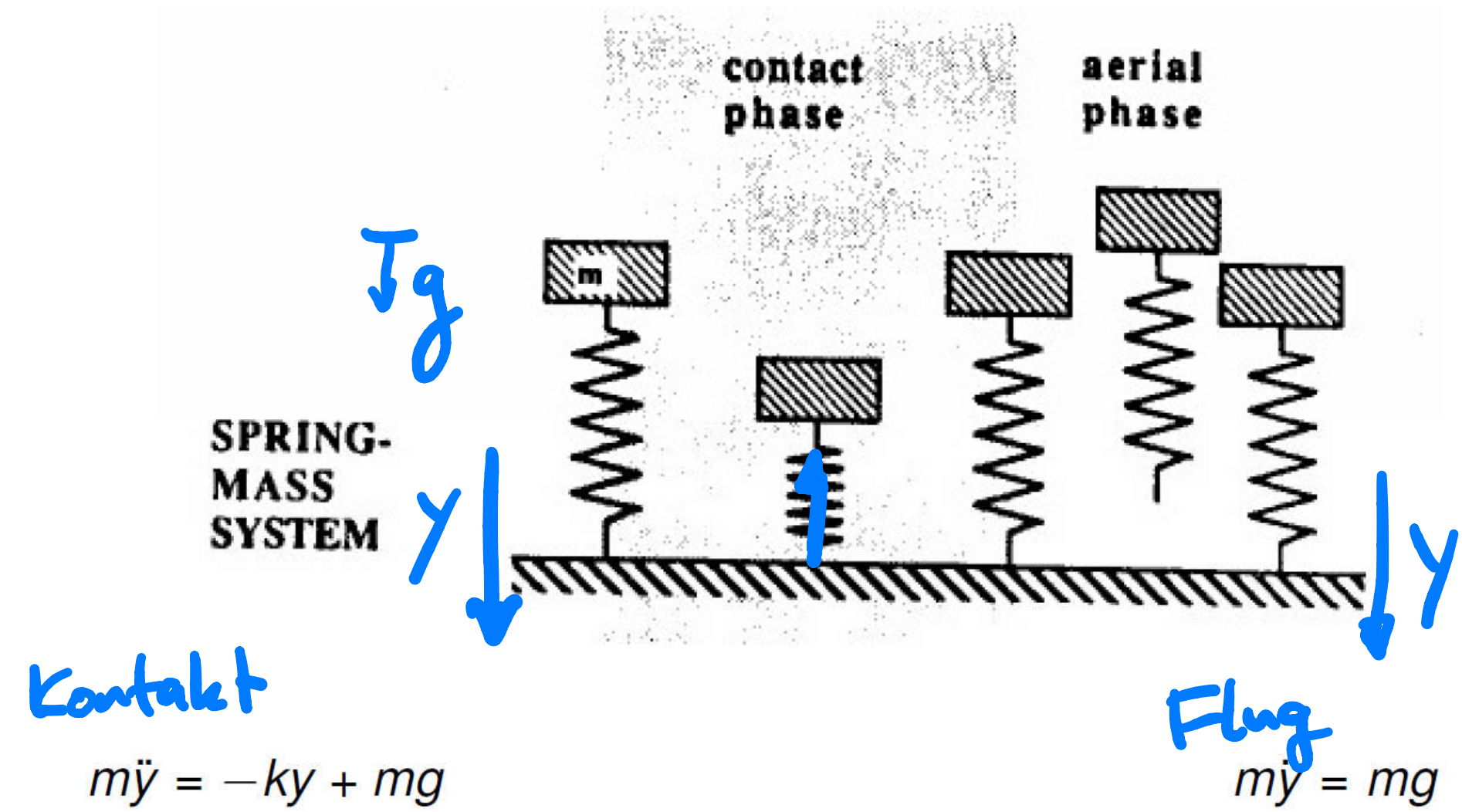
$$m\ddot{y} = -ky + mg$$

$$y(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + \frac{g}{\omega^2}$$

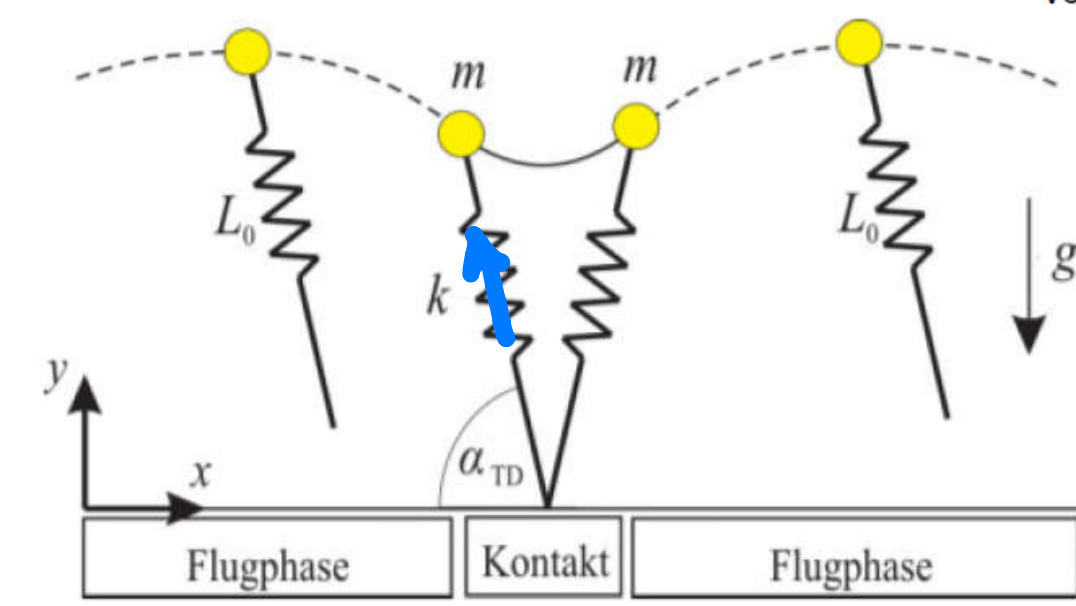
3 Gleichungen für 3 Unbekannten:

- $A_1$ : Amplitude sin
- $A_2$ : Amplitude cos
- $\omega$ : Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Vogl, Schütz FS 2019 544



Flugphase:

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

Kontaktphase:

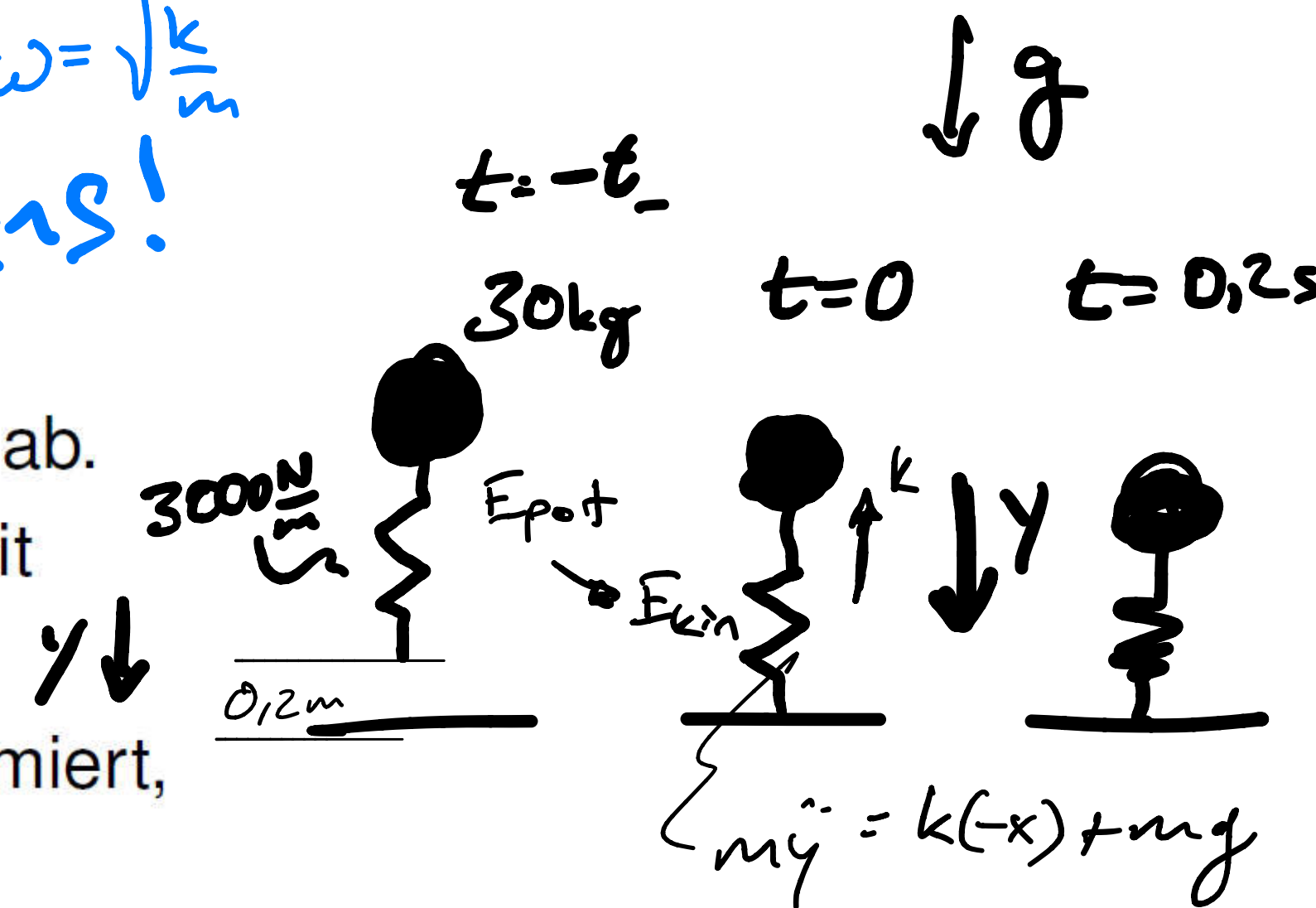
$$\begin{pmatrix} F_{B,x} \\ F_{B,y} \end{pmatrix} = -k(l_0 - l) \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix},$$

Vogl, Schütz FS 2019 547

# Übung – Harmonischer Oszillator (Vorlesung)

$\omega^2 = \frac{k}{m}$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$   
**Radians!**

Ein Kind hüpfert mit seinem Hüpfstab ( $m_{ges} = 30 \text{ kg}$ ) vertikal am selben Ort auf und ab. Am höchsten Punkt der Flugphase befindet sich der unterste Punkt des Stabes mit entspannter Feder 20 cm über dem Boden. Um welche Distanz ist die Feder zum Zeitpunkt  $t = 0.2 \text{ s}$  der Kontaktphase (also nach Auftreffen auf dem Boden) komprimiert, wenn die Stahlfeder im Stab eine Federkonstante von  $k = 3000 \text{ N m}^{-1}$  hat?



$m\ddot{y} = -ky + mg$ $y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{g}{\omega^2}$	$y(0) = 0 \quad \text{bei } t_0$ $\dot{y}(0) \Rightarrow mgh = \frac{1}{2} m \dot{y}_0^2$ $\dot{y}(0) = \sqrt{2gh} = \underline{1.981 \frac{m}{s}}$	$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{3000}{30} = 100 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}$ $\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
--	---	--

Bestimmen von  $y(t=0.2s)$  aus Anfangsbedingungen:

$$y(t) = \dots \Rightarrow y(0) = B \cos(0) + \frac{g}{\omega^2} = 0 \Rightarrow B = -\frac{g}{\omega^2} = \underline{-0.098 \text{ m}}$$

$$\dot{y}(t) = A\omega \cos(\omega t) - B\omega \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \dot{y}(0) = A\omega = \dot{y}_0 \Rightarrow A = \frac{\dot{y}_0}{\omega} = \underline{0.198 \text{ m}}$$

$$y(0.2) = 0.198 \sin(10 \cdot 0.2) - 0.098 \cos(10 \cdot 0.2) + 0.098 \text{ m}$$

Radians

$$= \underline{\underline{0.319 \text{ m}}}$$

# Muskel

## Muskelmechanik, Muskeloptimierung

### Lagrange-Formalismus

$$L = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = 0$$

### Energie des Mehrkörpersystems

mit  $W$  als Leistung

$$W_{M, \text{aktiv}} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$W_{R, \text{passiv}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$$

$$\frac{\Delta E_s}{\Delta t} = \sum_i^2 W_{R,i} + \sum_j^N W_{M,j} - \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

### Inverse dynamische Analyse

mit  $R$  als Reaktionskräfte

$$2D: J_0 \alpha = M_{zp} + M_{zd} + \sum_i (R_{x,i} \cdot l_{x,i} + R_{y,i} \cdot l_{y,i})$$

### Euler-Gleichungen

Für rotierende Starrkörpersysteme:

$$F_x = m \left( \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y \right)$$

$$F_y = m \left( \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z \right)$$

$$F_z = m \left( \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x \right)$$

$$M_x = J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z$$

$$M_y = J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x$$

$$M_z = J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y$$

### Muskelmechanik

Hillmodell, mit Muskelkraft  $F$

$$F(v) = F_0 - (F_0 + a) \frac{v}{v+b} = \frac{F_0 b - av}{v+b}$$

$$L(v) = vF(v)$$

$$\dot{Q}(v) = \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{F(v)}{F_0} \right) (v+b)$$

Huxleymodell:

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = f(x)[1 - n(x,t)] - g(x) \cdot n(x,t) - v(t) \cdot n'(x,t)$$

$$\bar{n}(x) = \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} \quad \text{isometrisch}$$

### Muskeloptimierung

$$J = \psi(F_1, F_2, \dots, F_N) - \lambda (M_{\text{tot}} - \sum_{i=1}^N h_i \cdot F_i)$$

### Harmonischer Oszillator

$$m\ddot{y} = -ky + mg$$

$$y(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + \frac{g}{\omega^2}$$

### Übergang Laufen-Gehen

$$r(t) = l_0 + \frac{r_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2} (\cos(\omega t) - 1)$$

$$\Delta l_{\text{hor}} = l_0 (1 - \sin(\alpha_0))$$

### Hilfsgleichungen

Quadratische Lösungsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sinus- und Kosinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin c}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

# Muskel

## Muskelmechanik

Hillmodell, mit Muskelkraft  $F$

$$F(v) = F_0 - (F_0 + a) \frac{v}{v + b} = \frac{F_0 b - av}{v + b}$$

$$\dot{Q}(v) = \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{F(v)}{F_0} \right) (v + b)$$

$F(v_{\max}) = 0$

Huxleymodell:

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = f(x)[1 - n(x, t)] - g(x) \cdot n(x, t) - v(t) \cdot n'(x, t)$$

$$\tilde{n}(x) = \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} \quad \text{isometrisch}$$

→ Theorie, Übungen

# Muskel

## Muskelmechanik

Hillmodell, mit Muskelkraft  $F$

$$F(v) = F_0 - (F_0 + a) \frac{v}{v + b} = \frac{F_0 b - av}{v + b}$$

$$\dot{Q}(v) = \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{F(v)}{F_0} \right) (v + b)$$

$$F(v_{max}) = 0$$

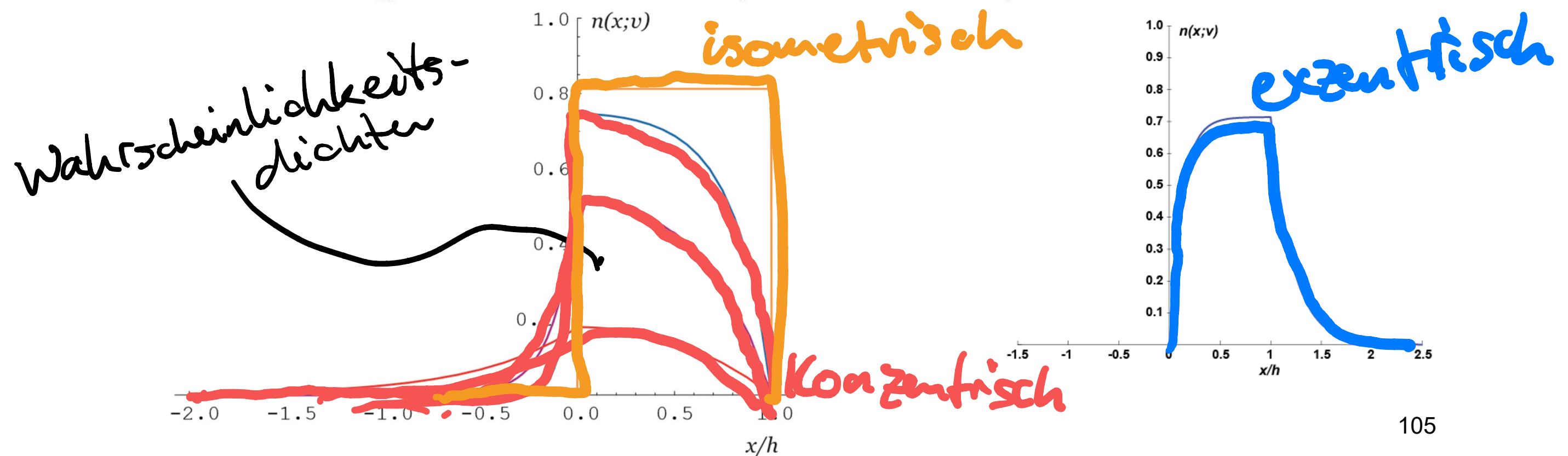
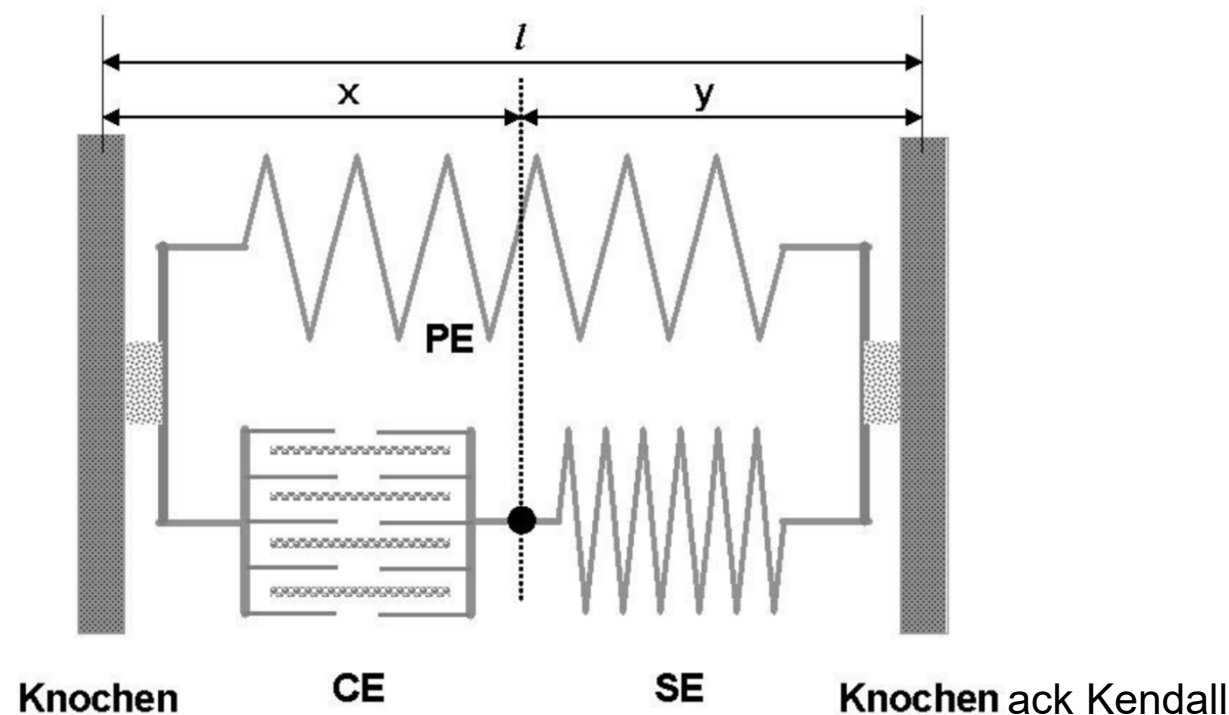
Huxleymodell:

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = f(x)[1 - n(x, t)] - g(x) \cdot n(x, t) - v(t) \cdot n'(x, t)$$

$$\tilde{n}(x) = \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} \quad \text{isometrisch}$$

- In der Biomechanik das meist benutzte Modell.
- Kann auf den ganzen Muskel-Sehnen Komplex angewendet werden, falls angenommen wird dass alle Fasern den aus dem gleichen Fasertyp bestehen, die gleiche Länge haben und im optimalen Längenbereich bei maximaler Aktivität arbeiten.
- Bietet keinen Einblick in den Mechanismus der Kontraktion und Kraftentwicklung innerhalb der motorischen Einheit und es wird angenommen, dass die Anzahl der möglichen Querbrücken bei maximaler Aktivierung konstant bleibt.

- Erlaubt die Beschreibung der Kraftentwicklung für jede mögliche Ausgangslänge und Verkürzungsgeschwindigkeiten des Sarkomers.
- Die Entwickelte Kraft hängt von der Anzahl der gebildeten Querbrücken und der Auslenkung der Bindungsglieder ab.
- Die Anzahl der Querbrücken ist wiederum abhängig von der Ausgangslänge des Sarkomers, der Querbrückenbildungsrate und der Lösungsrate, sowie der Geschwindigkeit der Kontraktion (viskose Effekte).



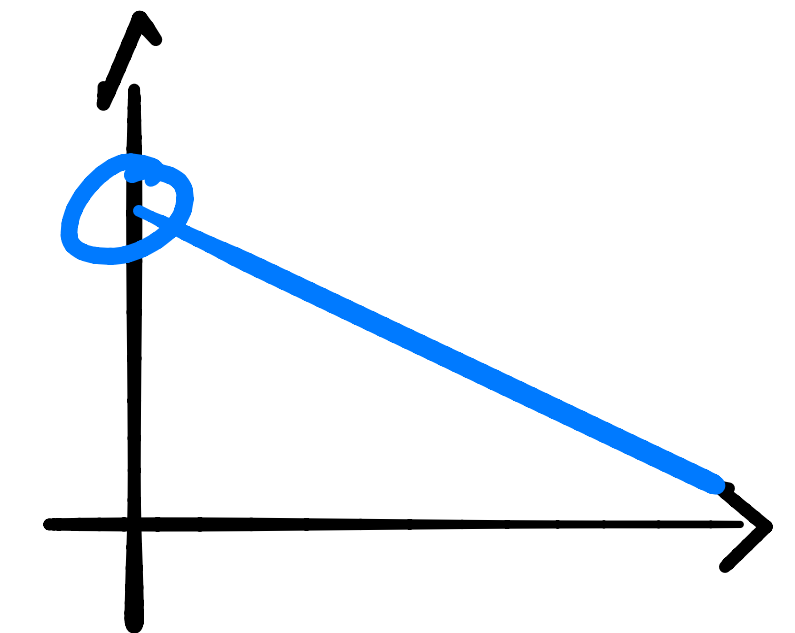
# Muskel

## Muskeloptimierung

Lagrange Multiplikator

„Modell“

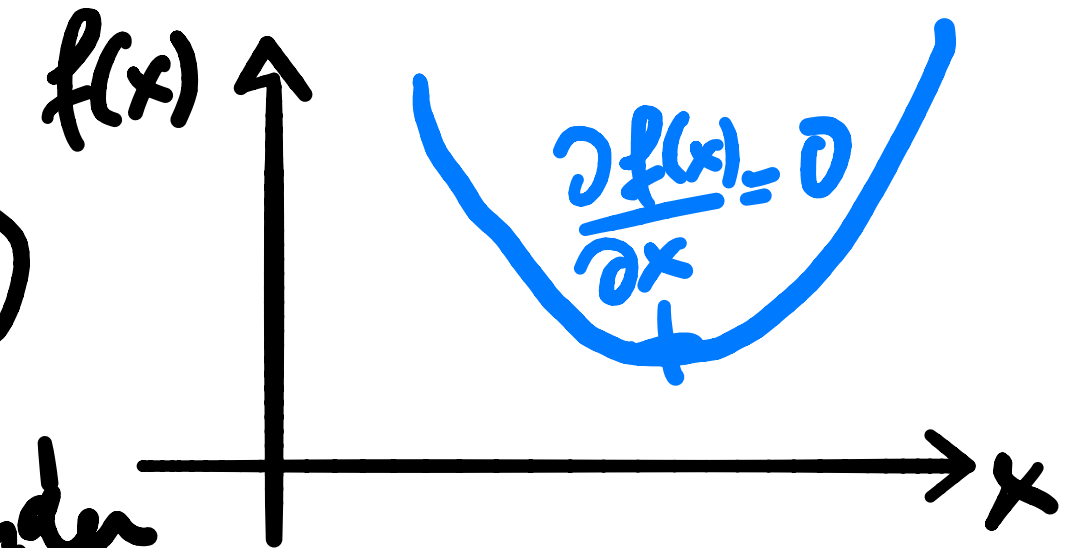
$$J = \psi(F_1, F_2, \dots, F_N) - \lambda(M_{tot} - \sum_{i=1}^N h_i \cdot F_i)$$



### 1. Kriterium $\psi$

- Summe der Muskelkräfte ist minimal
- Summe der Spannung ist minimal
- Summe der quadrierten Muskelkräfte ist minimal
- Beliebige

} Linear: Randwerte sind optimal / glob. minimum



### 2. Ableiten:

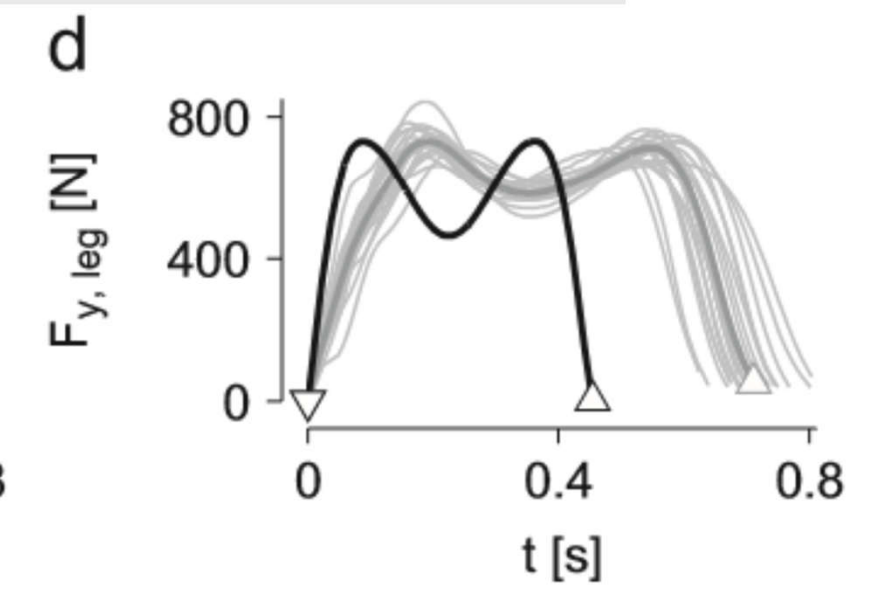
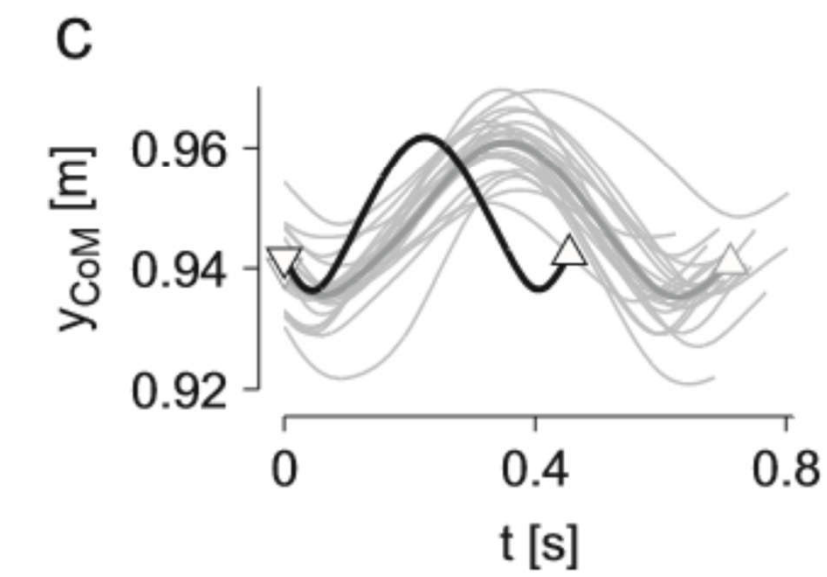
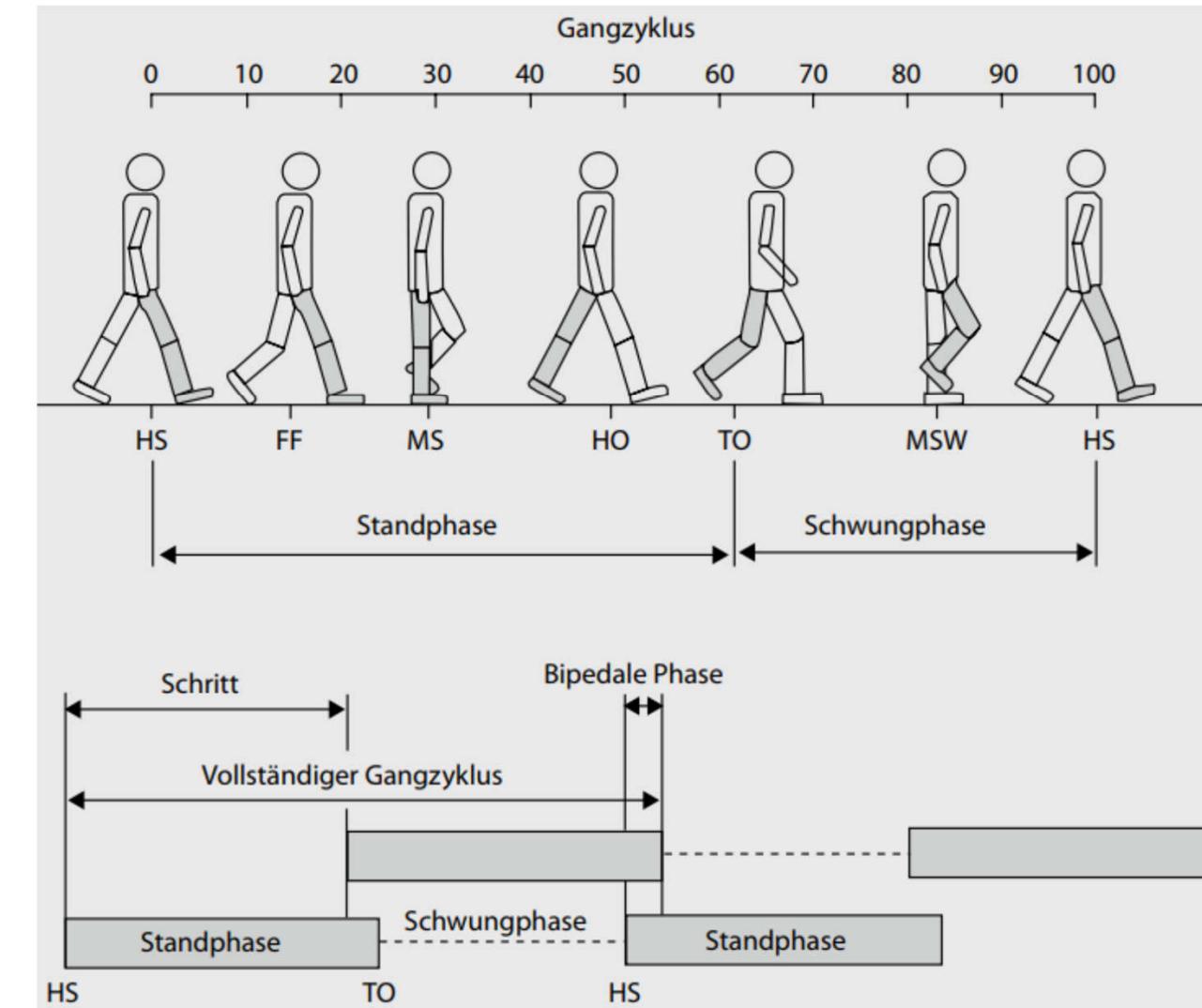
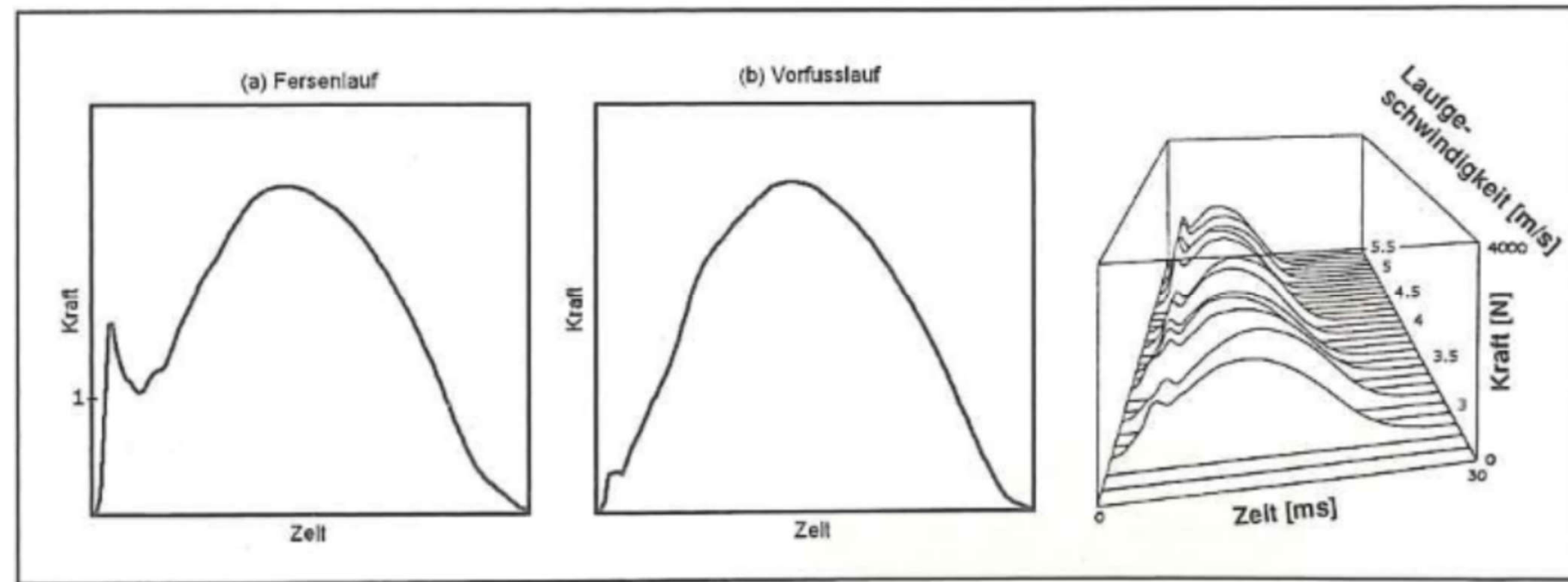
müssen ableiten um glob. min zu finden

- Ganze Funktion ableiten und gleich null setzen:  $\frac{\partial J}{\partial \lambda} = 0, \frac{\partial J}{\partial F_1} = 0, \frac{\partial J}{\partial F_i} = 0, \dots$

### 3. Gleichungssystem lösen



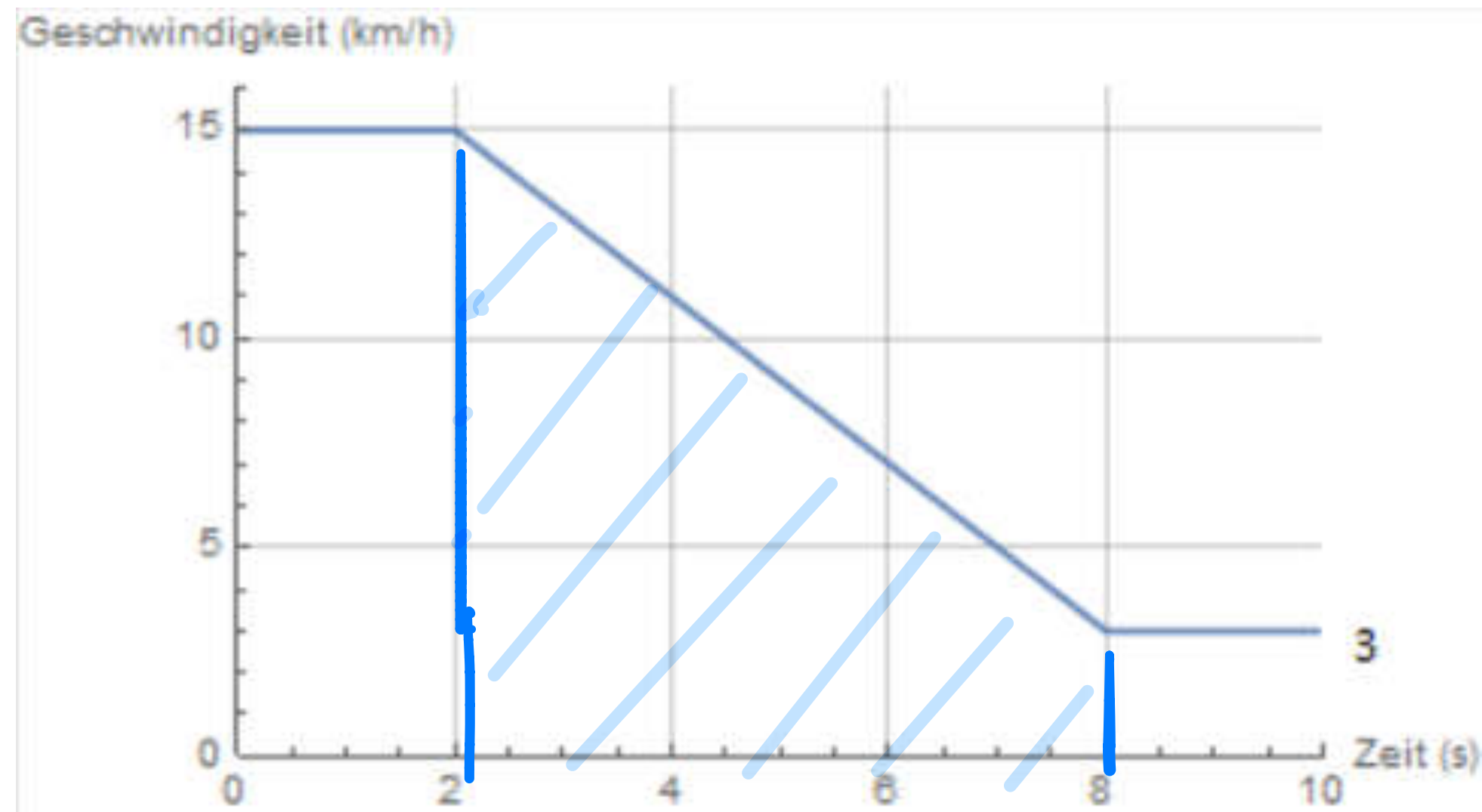
# Gangarten



# Lösungswege Alter Prüfungen

# Alte Prüfung - Winter 19: 1 Arbeit / $F = ma$

Ein Fahrradfahrer (Gesamtmasse  $m = 83\text{kg}$ ) fährt entlang der Flusspromenade und verlangsamt seine Geschwindigkeit. Berechnen Sie anhand des folgenden Geschwindigkeits-Zeit Diagramms die Bremskraft.



$$s = \left( \frac{12 \cdot 6}{2} + 3 \cdot 6 \right) \frac{1}{3.6} = 15$$

$$\frac{1}{2} m v_-^2 = \frac{1}{2} m v_+^2 + F \cdot s$$

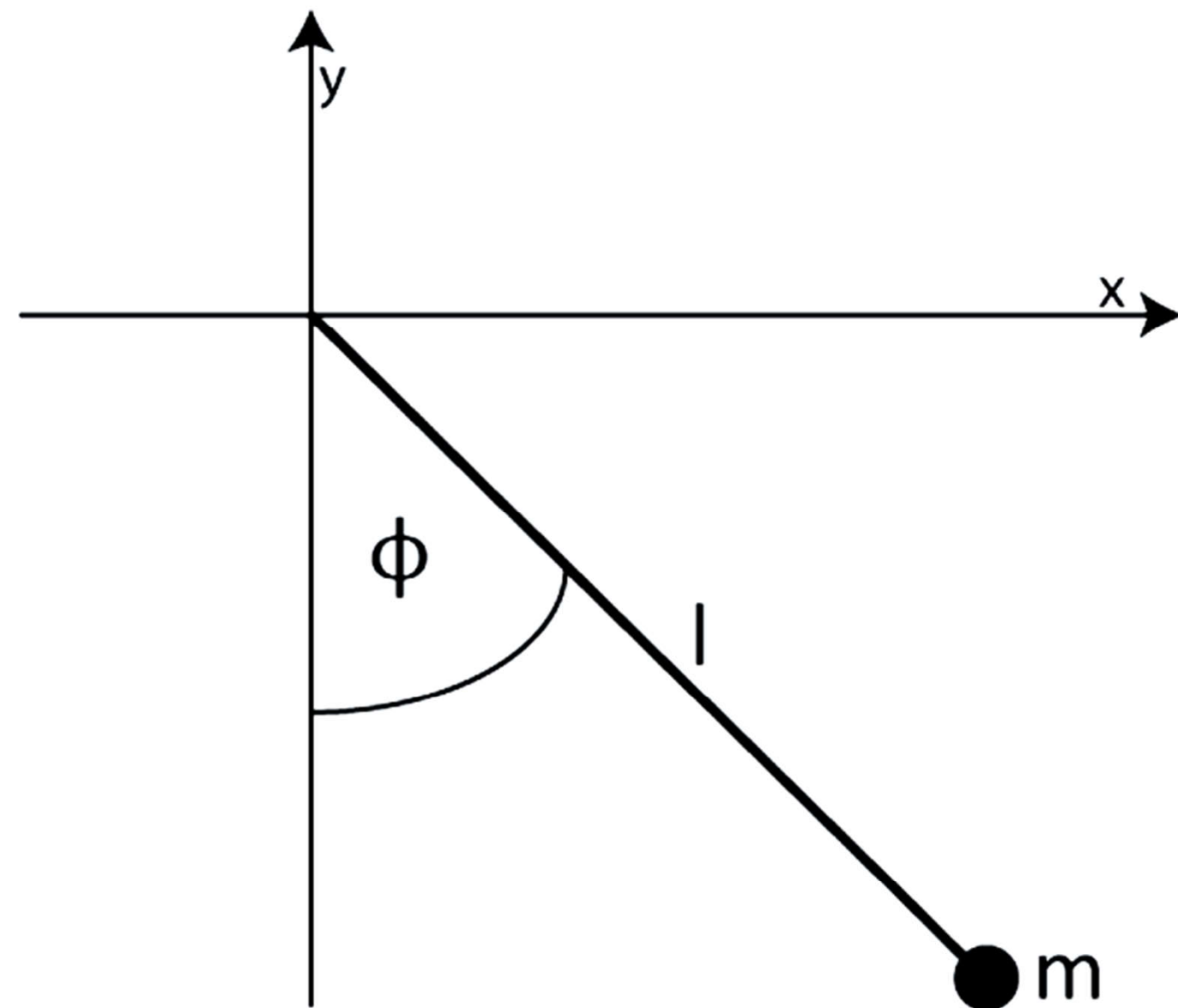
$$\frac{1}{2} m (v_-^2 - v_+^2) = F$$

$$= \frac{83}{30} (17.36 - 0.694)$$

$$\underline{\underline{F = 46.1 \text{ N}}}$$

# Alte Prüfung - Winter 19: 3 Lagrange

Ein Turner an der Reckstange kann in erster Näherung als ein mathematisches Pendel der Masse  $m = 70\text{kg}$  und Länge  $l = 0.8\text{m}$  beschrieben werden. Bewerten Sie ob folgendene Funktionen gültige Lagrange-Funktionen für dieses Problem sind:



~~$L(\phi, \dot{\phi}) = 32.20\phi^2 + 221.18 \cos \dot{\phi}$  (Joule)~~

~~$L(\phi, \dot{\phi}) = 11.20\dot{\phi}^2 + 549.36 \cos \phi$  (Joule)~~

~~$L(\phi, \dot{\phi}) = 32.20\phi^2 + 221.18 \cos \dot{\phi} + 18.10$  (Joule)~~

~~$L(\phi, \dot{\phi}) = 11.20\phi^2 + 549.36 \cos \dot{\phi}$  (Joule)~~

$$L = T - V + \frac{df}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = 0$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (L \dot{\phi})^2 = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\phi}^2$$

$$V = m g h = m g L (1 - \cos \phi)$$

$$L = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\phi}^2 - m g L (1 - \cos \phi)$$

# Alte Prüfung - Winter 19: 4 Harmonischer Oszillator

Sie untersuchen die Wischbewegung beim Curling. Lösung der Bewegungsgleichungen ergibt folgendes Model für die horizontale Auslenkung des Wischbesens:  $x(t) = A \sin(\omega t + B)$ , mit  $A, B$  den unbestimmten Konstanten.

Berechnen Sie die Auslenkung zum Zeitpunkt  $t = 2\text{s}$ , wenn  $\omega = \sqrt{2} (1/\text{s})$  und die Auslenkung und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  als  $x(0) = 1/\sqrt{2}\text{m}$  und  $\dot{x}(0) = 1\text{m/s}$  gegeben sind.

$$x(t) = A \sin(\omega t + B)$$

$$\dot{x} = A \omega \cos(\omega t + B)$$

Radians!

$$x(0) = A \sin(B) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{m}$$

$$\dot{x}(0) = A \omega \cos(B) = 1 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow x(t=2\text{s}) = \sin\left(\sqrt{2} \cdot 2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \underline{\underline{-0.455 \text{ m}}}$$

$$\frac{A \sin(B)}{A \omega \cos(B)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = 1$$

$$\tan B = \frac{\sqrt{2}}{2} \omega$$

$$B = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$



# Alte Prüfung - Sommer 19.12 Harmonischer Oszillator

Ein Bungee-Jumping-Springerin ( $m_{ges}=65\text{kg}$ ) möchte das Verhalten des Seils modellieren wenn sie abgebremst wird. Hierzu nimmt sie das Bungee-Seil als Feder mit Federkonstante  $k=50\text{N/m}$  an. Nach dem freien Fall erreicht die Springerin zum Zeitpunkt  $t=0$  eine Geschwindigkeit von  $28\text{m/s}$  bevor das Seil gedehnt wird und die Springerin durch das Seil abgebremst wird. Wie gross ist die Auslenkung des Seils zum Zeitpunkt  $t=3$

Newton:

$$m\ddot{y} = -ky + mg$$

↳ DGL für Auslenkung (Ansatz):

$$y(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t + \frac{g}{\omega^2}$$

$$y(0) = B + \frac{g}{\omega^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{g}{\omega^2}$$

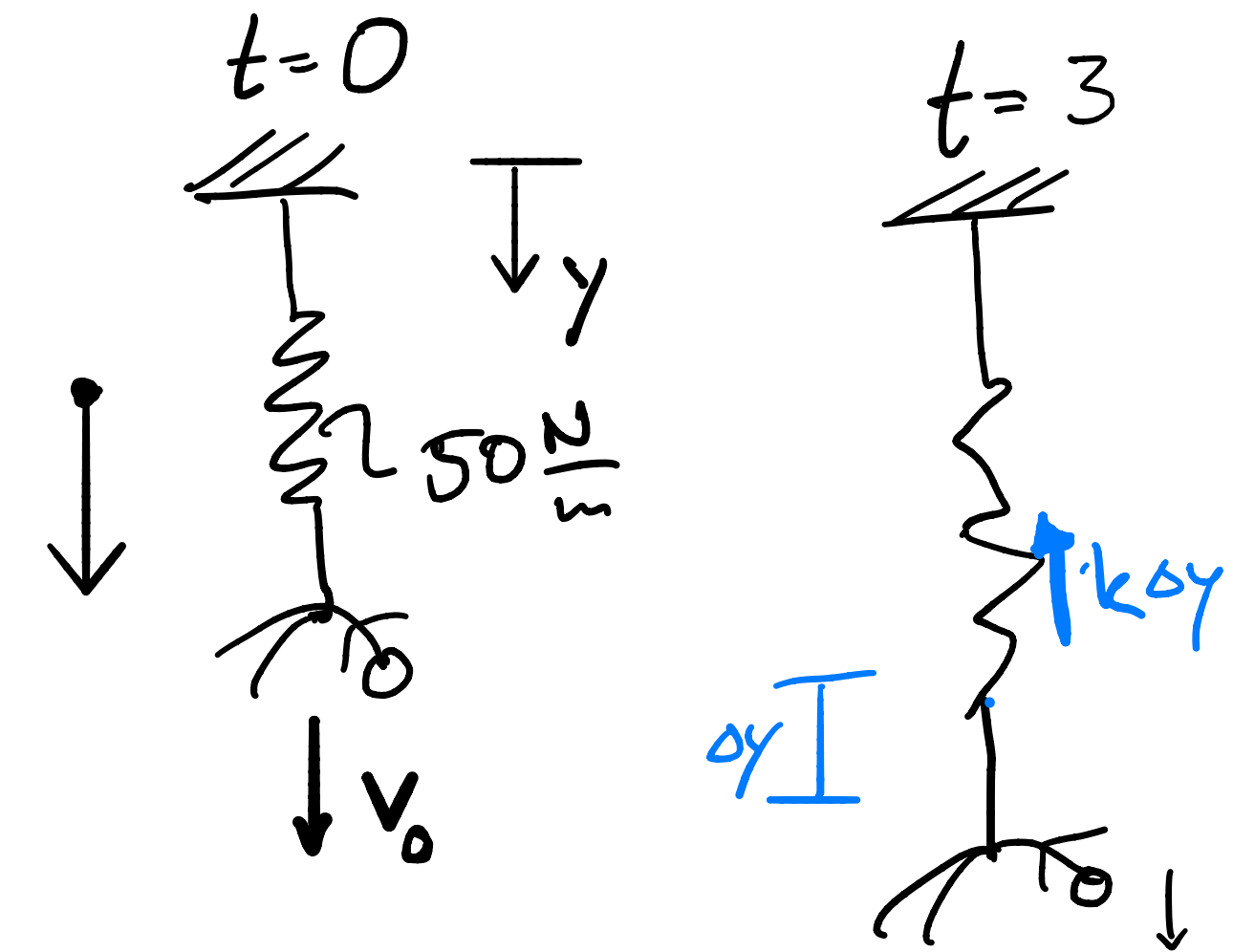
$$\dot{y}(0) = A\omega\cos(0) = 28\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{28}{\omega}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 28\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\omega^2 = \frac{50}{65} = 0.7\dots$$

$$\omega = \sqrt{\frac{50}{65}} = 0.877\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



Radians

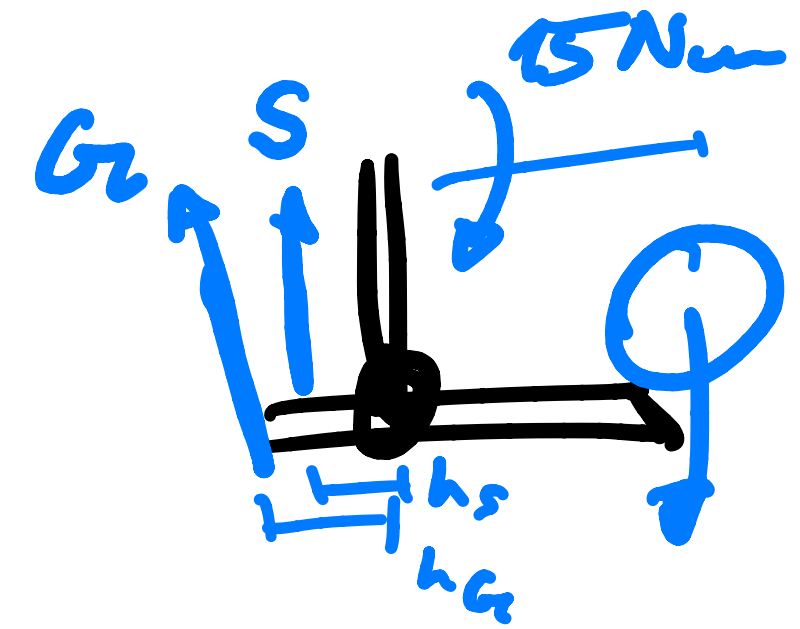
$$y(t=3) = A\sin(0.877 \cdot 3) - \frac{g}{\omega^2}\cos(0.877 \cdot 3) + \frac{g}{\omega^2}$$

$$= \underline{\underline{39.481\text{ m}}}$$

$$J = \psi(F_1, F_2) - \lambda \left( M_{\text{tot}} - \sum_{i=1}^n h_i F_i \right)$$

## Alte Prüfung - Winter 19: 9 Muskel Optimierung

Für folgende Hebelarme für M. Soleus und M. Gastrocnemius und einem Gelenkmoment von  $M = 15 \text{ Nm}$ , finden Sie die Kraft im M. Soleus die das Muskeloptimierungskriterium  $\psi = \sum_i 3F_i^2$  unter der Bedingung  $\sum_i h_i F_i = M$  minimiert.  
 $h_{So} = 4.2 \text{ cm}$ ,  $h_{Ga} = 5.1 \text{ cm}$



$$J = 3F_s^2 + 3F_g^2 - \lambda (15 \text{ Nm} - 0.042 F_s - 0.051 F_g)$$

Optimum:  $\nabla J = 0$

$$\text{I} \quad \frac{\partial J}{\partial \lambda} = -15 \text{ Nm} + 0.042 F_s + 0.051 F_g \stackrel{!}{=} 0$$

$$\text{II} \quad \frac{\partial J}{\partial F_g} = 6 F_g + \lambda \cdot 0.042 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\text{III} \quad \frac{\partial J}{\partial F_s} = 6 F_s + \lambda \cdot 0.051 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\text{II}}{\text{III}}: \frac{6 F_g}{6 F_s} = \frac{-\lambda \cdot 0.042}{-\lambda \cdot 0.051}$$

$$F_g = \frac{0.042}{0.051} F_s$$

$$0.042 F_s + \frac{0.051^2}{0.042} F_s = 15 \text{ Nm}$$

$$F_s \left( 0.042 + \frac{0.051^2}{0.042} \right) = 15 \text{ Nm}$$

$$\leadsto F_s = \underline{\underline{144.33 \text{ N}}}$$

$$\leadsto F_g = \underline{\underline{175.26 \text{ N}}}$$

# Alte Prüfung - Winter 19: 11 Arbeit

Obwohl beim Fallschirmsprung Axels Fallschirm versagte, verletzte er sich bei seiner Landung im Schnee nur leicht. Unter der Annahme, dass Axel (inkl. Ausrüstung)  $m = 85\text{kg}$  schwer war, seine Aufprallgeschwindigkeit  $v_0 = 56\text{m/s}$  betrug, und der Schnee eine konstante (überlebende) Kraft von  $1.2 * 10^5$  Newton auf ihn ausübte - wie tief war der Schnee mindestens?

$$E_{\text{kin}} = - \int F ds$$
$$\frac{1}{2}mv^2 = Fs \quad \leadsto \quad s = 1.11\text{m}$$



# Alte Prüfung - Winter 19: 15 Muskel (Hill)

$$F(v) = F_0 - (F_0 + a) \frac{v}{v+b} = \frac{F_0 b - av}{v+b}$$

Für einen unbekanntem Muskel (reiner Typ) mit dem Querschnitt  $A_0 = 10 \text{ cm}^2$  und den Charakteristischen Parametern  $a = 150 \text{ N}$  und  $b = 27 \text{ cm/s}$  wurde mit der Kraft-Geschwindigkeitsrelation (Hill)  $P(v)$  eine maximale Verkürzungsgeschwindigkeit von  $v_{\max} = 0.9 \text{ m/s}$  berechnet.

Wie viel Kraft kann dieser Muskel bei einer isometrischen Kontraktion pro Quadratcentimeter maximal erzeugen?

$$\text{ges: } \frac{F_0}{A_0}, \quad v_{\max} = 0.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad F(v) = \frac{F_0 b - av}{v+b}$$

$$F_0 = F_{\text{iso.}}$$

$$F(v_{\max}) = 0$$

$$F(v_{\max}) = \frac{F_0 b - av_{\max}}{v_{\max} + b} \stackrel{!}{=} 0$$

$$F_0 b = av_{\max}$$

$$F_0 = \frac{av_{\max}}{b} = \frac{150 \text{ N} \cdot 0.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0.27 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \underline{\underline{500 \text{ N}}}$$

$$\frac{F_0}{A_0} = \frac{500 \text{ N}}{10 \text{ cm}^2} = \underline{\underline{50 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}}}$$

# Alte Prüfung - Winter 19: 22 Energie

Eine Murmel (Masse  $m = 3\text{g}$ , Radius  $r = 7.5\text{mm}$ ) rollt mit einer Geschwindigkeit von  $v = 3.5\text{m/s}$  auf eine Rampe der Höhe  $h = 4.5\text{m}$  zu. Welche lineare Geschwindigkeit hat die Murmel nachdem sie die Rampe hinuntergerollt ist?

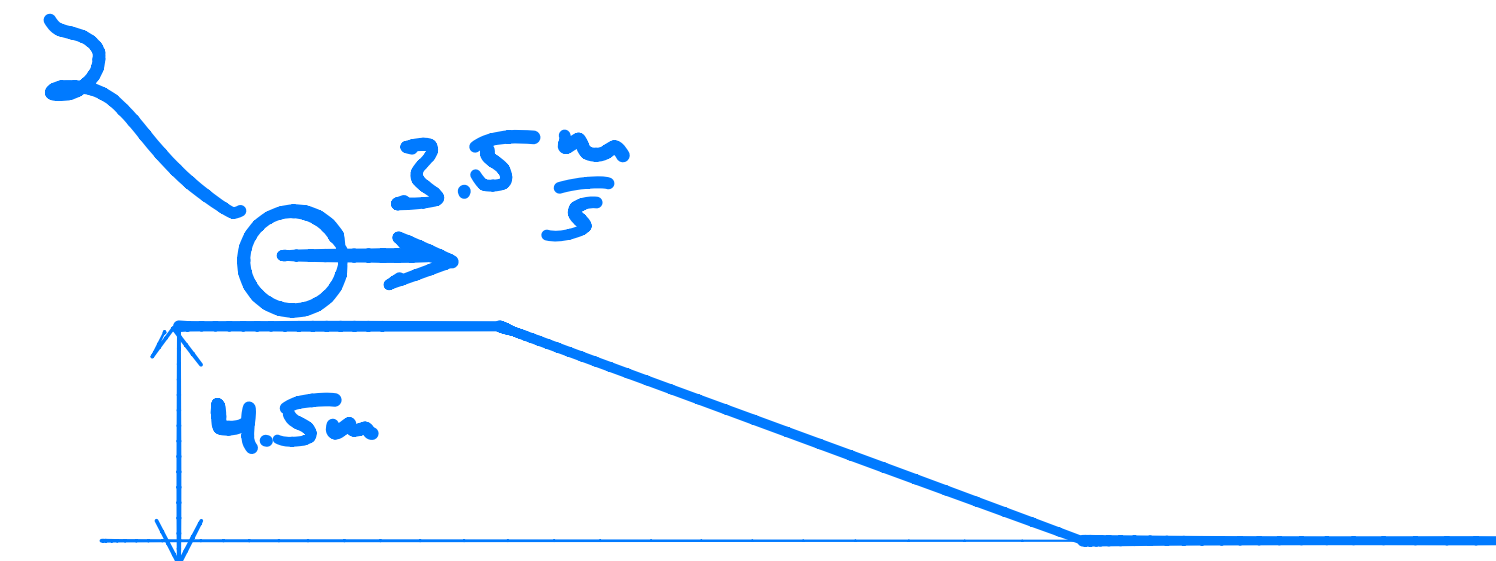
Anmerkung: Die Murmel kann als homogene Kugel angenommen werden und rollt ohne zu rutschen.

Trägheitsmoment einer Kugel bzgl einer Achse durch den Schwerpunkt  $I = \frac{2}{5}MR^2$ .

$$E_{\text{pot}} + E_{\text{kin,sp}} + E_{\text{rot,sp}} = E_{\text{rot}} + E_{\text{kin}}$$

$$v_2 = 8.678 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$m = 0.003\text{kg}, \quad r = 7.5\text{mm}, \quad J = \frac{2}{5}MR^2$$



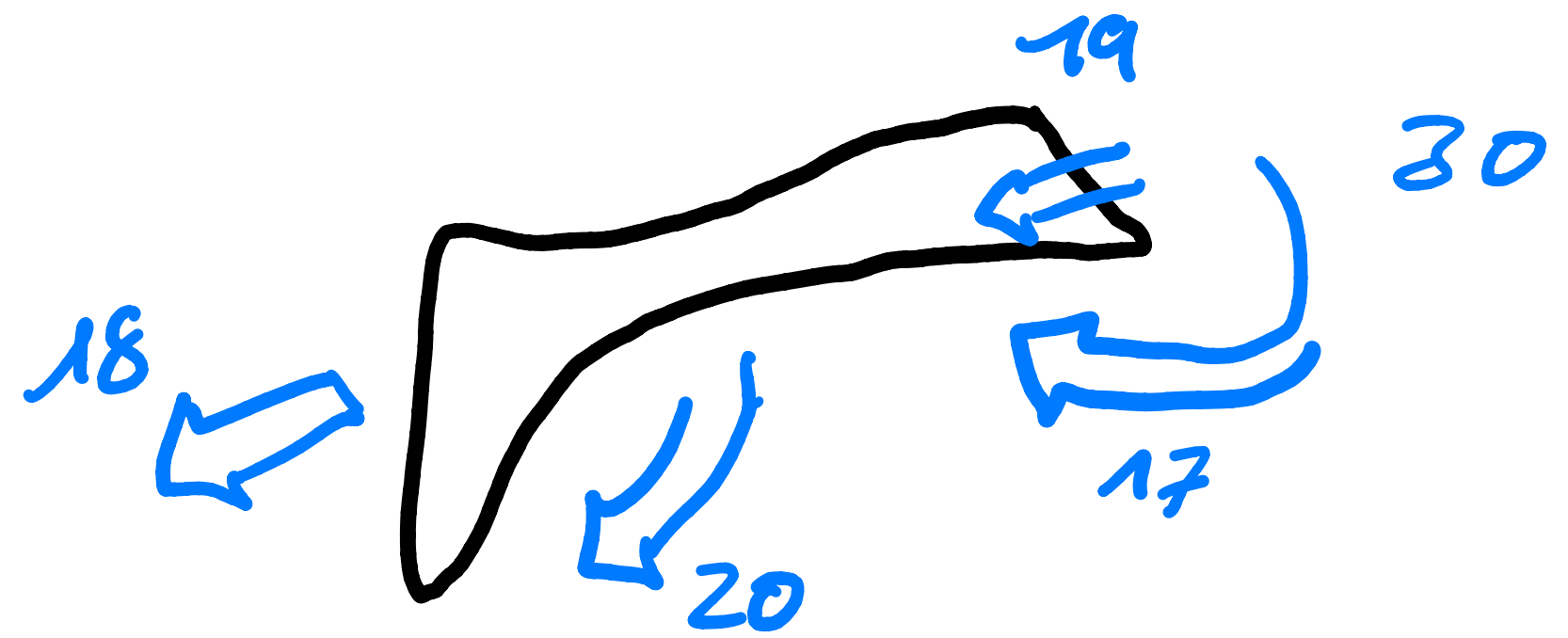
# Alte Prüfung - Winter 19: 29 Leistung

Für folgende Werte der aktiven und passiven Energieflüsse pro Zeiteinheit, berechnen Sie die Leistung die vom Unterschenkelsegment verrichtet wird.



$$\Delta P = 19 + 17 - 20 - 18 = -2$$

↳ Es werden 2 Watt verrichtet



# Alte Prüfung - Winter 19: 21 Transformation

ND ML gehen von extr. rot. aus

Ein Kraftvektor wird durch die folgenden Elementarrotationen vom lokalen Koordinatensystem ins globale Koordinatensystem transformiert:

Zuerst  $60^\circ$  um die z-Achse und anschliessend  $90^\circ$  um die y-Achse.

$$R: L \rightarrow G \quad [{}^G R_L]$$

Extrinsisch:  $[{}^G R_L] = R_y(+90^\circ) R_z(+60^\circ)$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Intrinsisch:  $[{}^G R_L] = R_z(-60^\circ) R_y(-90^\circ)^T$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & +\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ +1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Elementarrotationen (~~negativer~~ <sup>positiver</sup> Drehsinn):

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

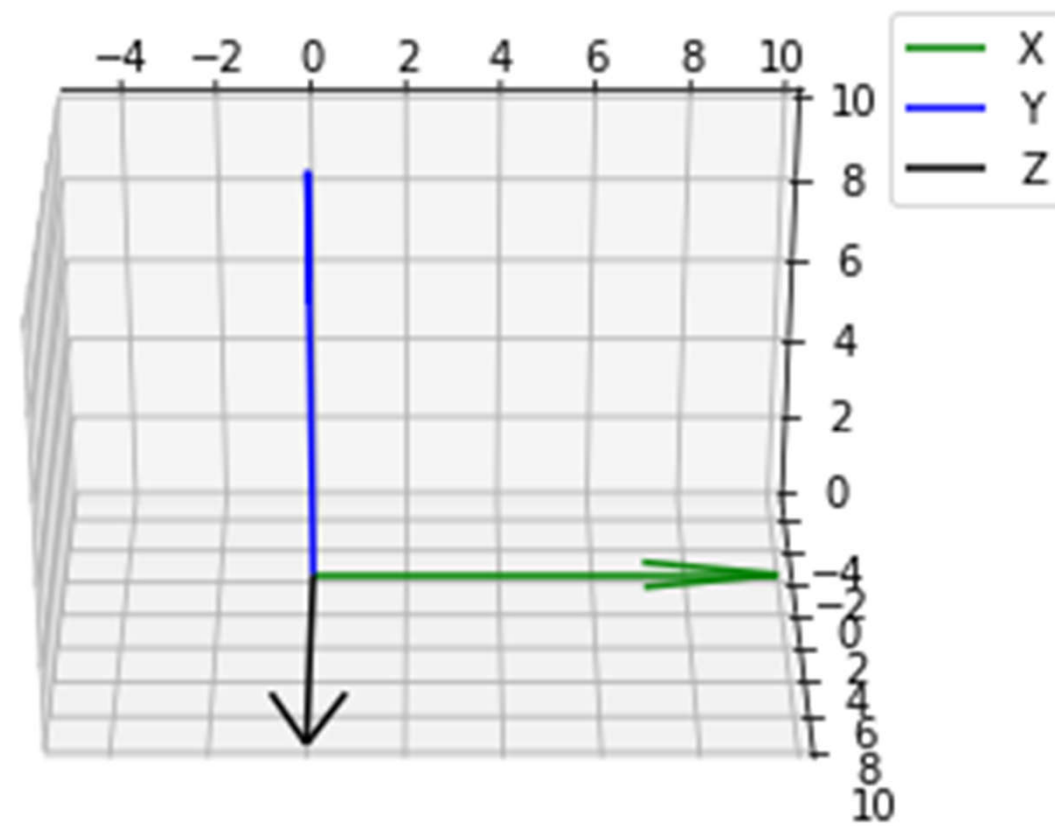
$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Alte Prüfung - Winter 19: 21 Transformation

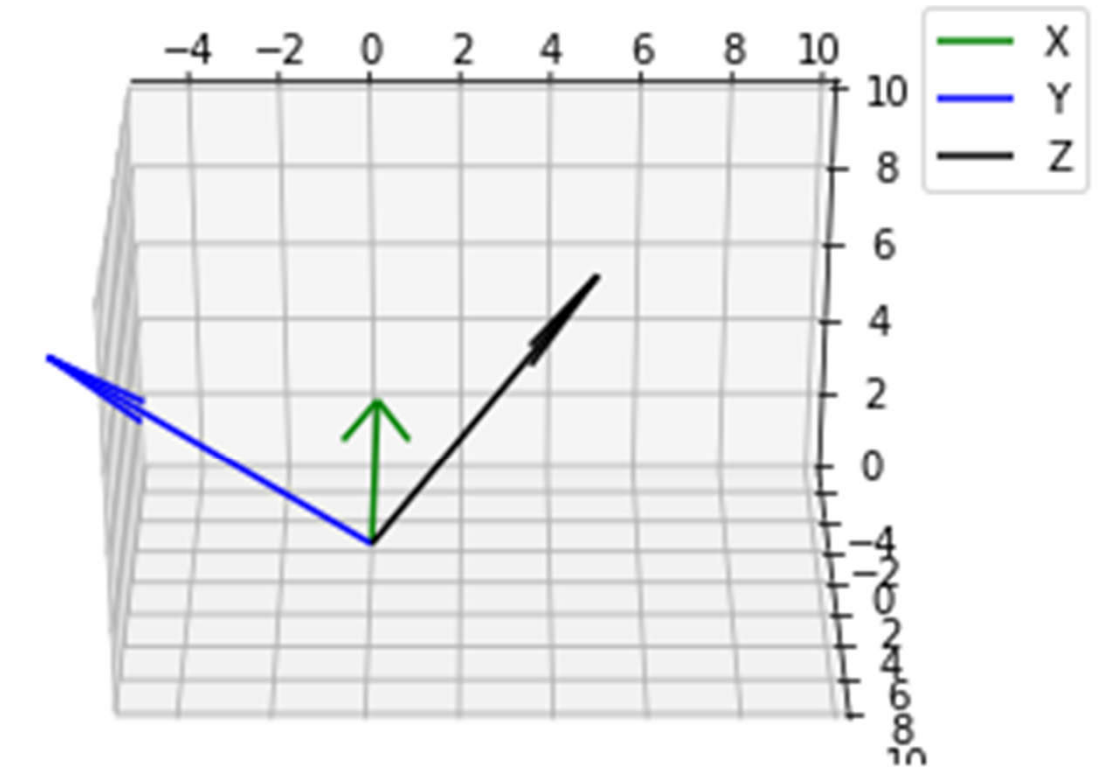
Ein Kraftvektor wird durch die folgenden Elementarrotationen vom lokalen Koordinatensystem ins globale Koordinatensystem transformiert:

Zuerst  $60^\circ$  um die z-Achse und anschliessend  $90^\circ$  um die y-Achse.

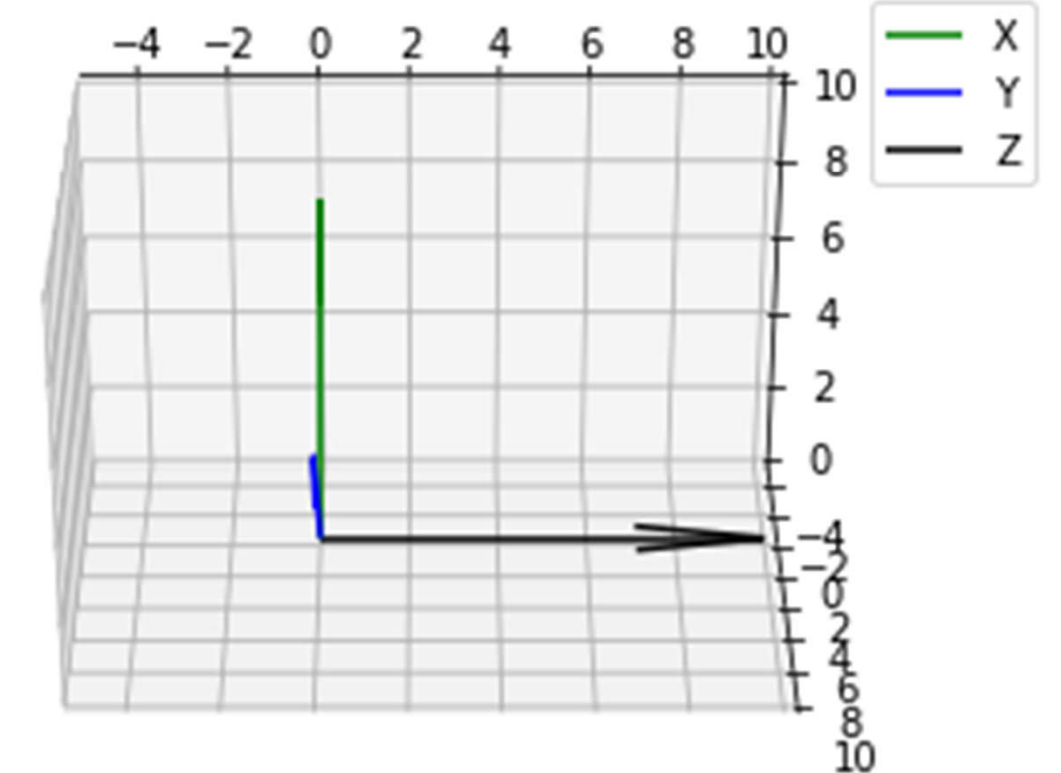
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



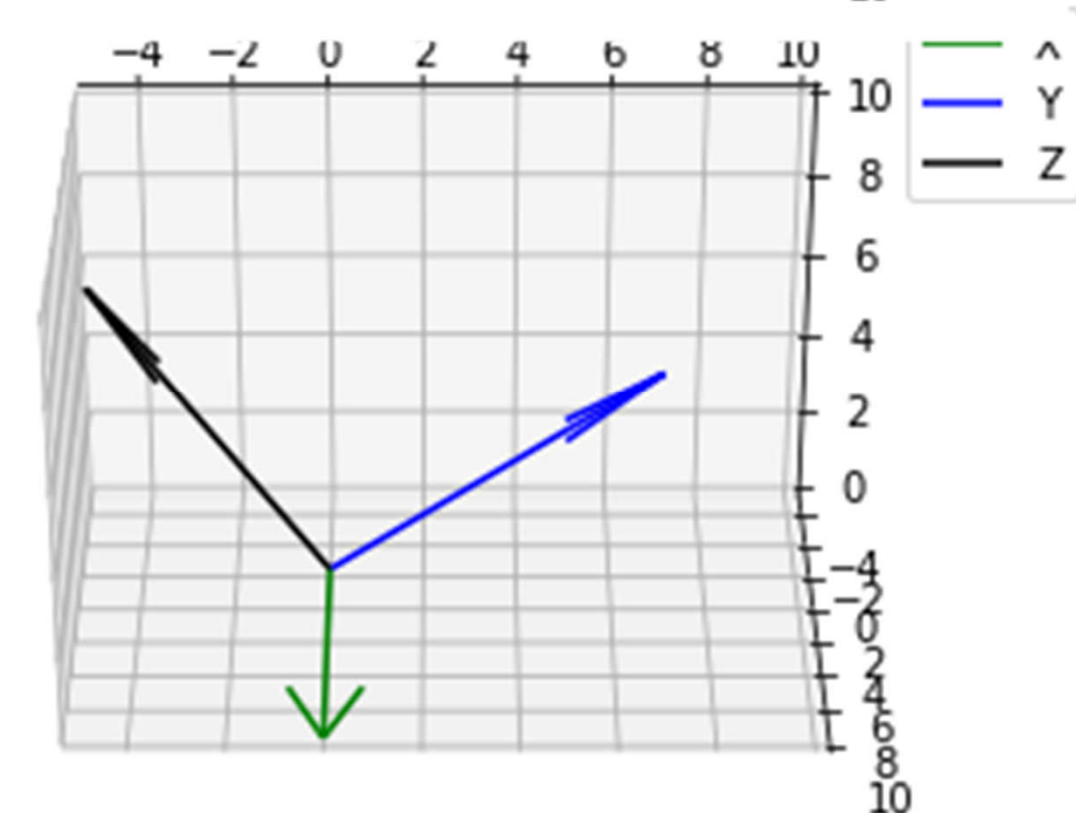
$$R = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$



$$R = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



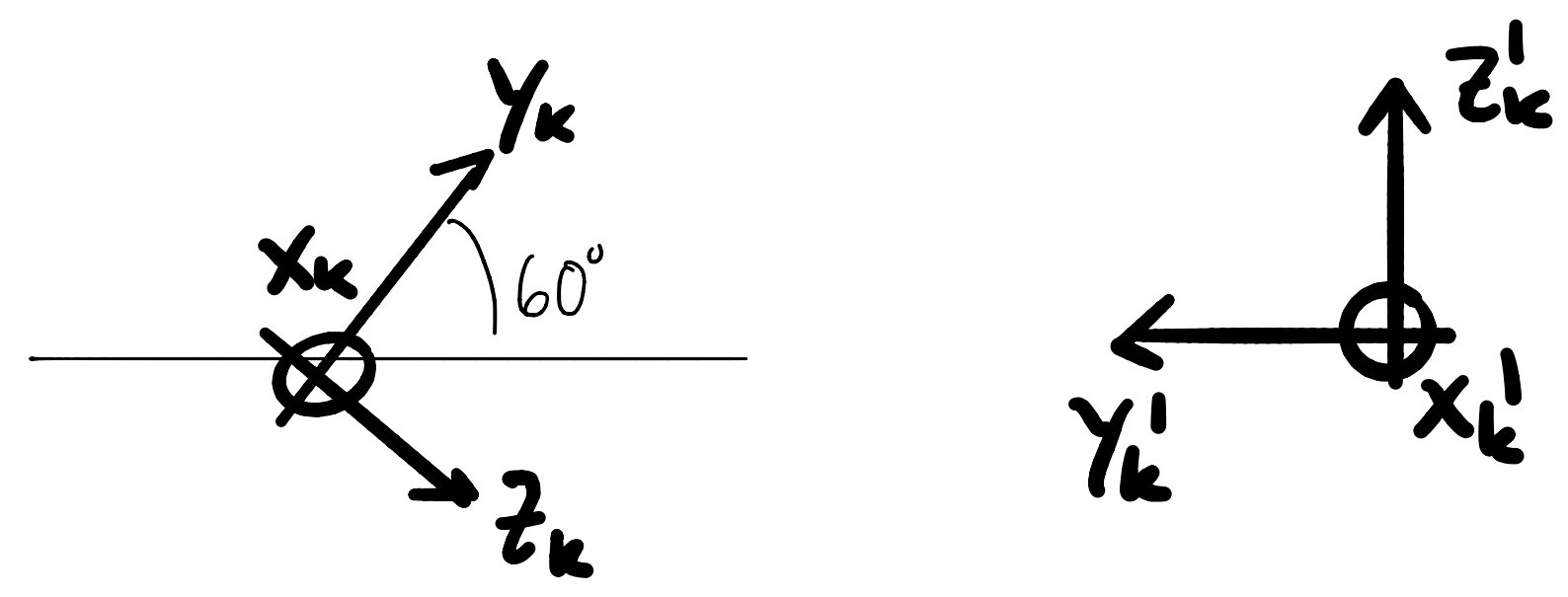
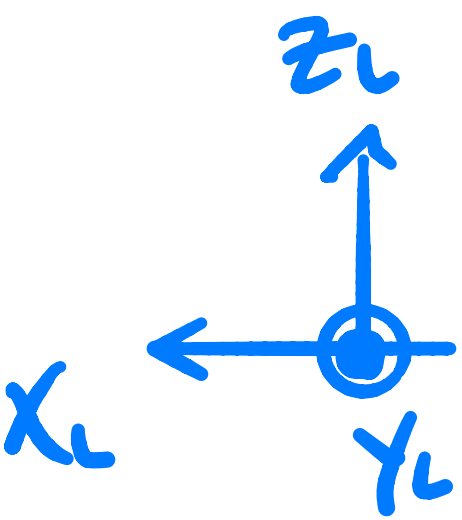
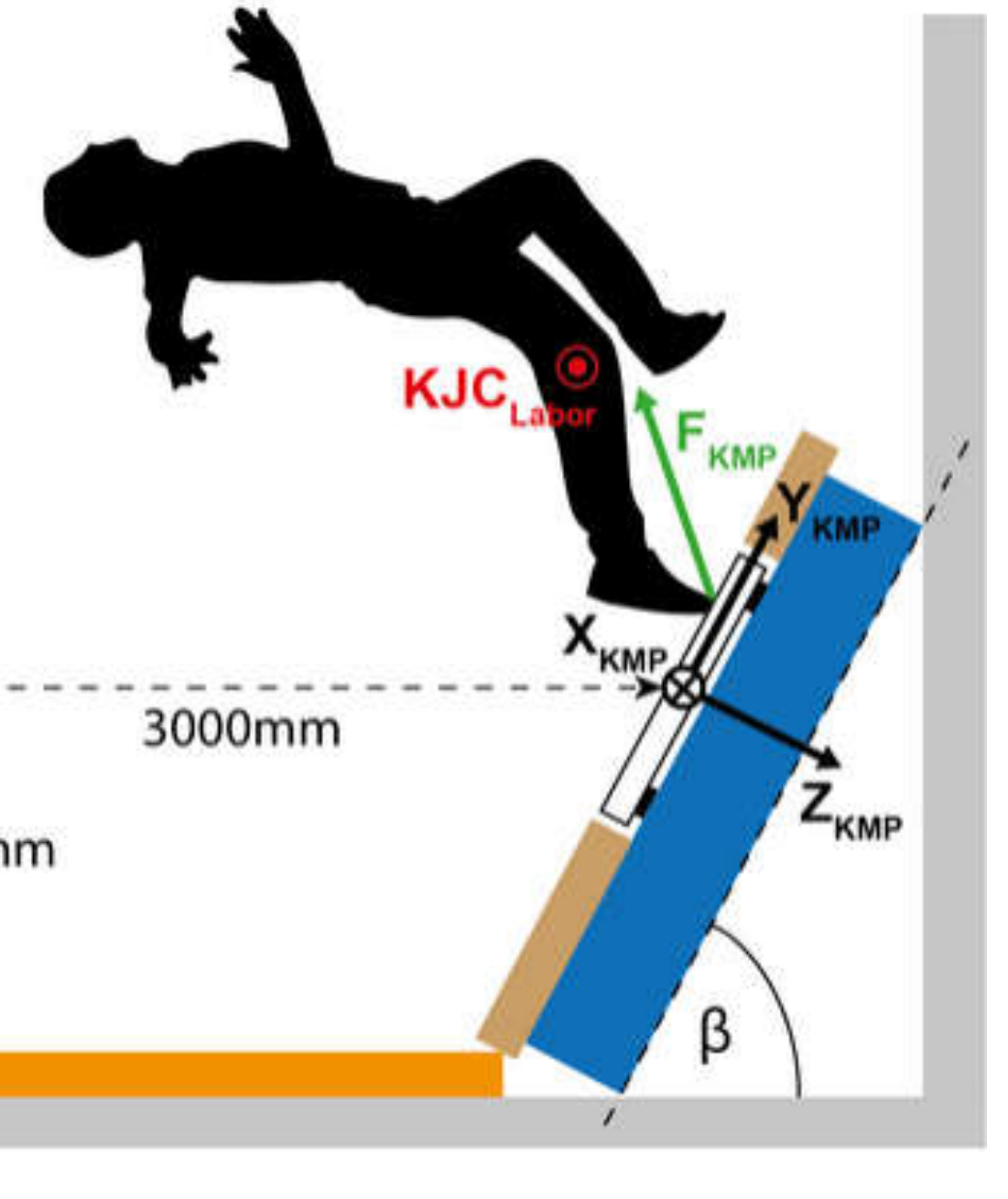
[https://en.wikipedia.org/wiki/Givens\\_rotation/Dimension\\_3](https://en.wikipedia.org/wiki/Givens_rotation/Dimension_3)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Davenport\\_chained\\_rotations](https://en.wikipedia.org/wiki/Davenport_chained_rotations)

# Alte Prüfung - Sommer 19: 21 Transformation

Um das externe Drehmoment im Knie bei einer Vorübung für den Wall-Flip zu bestimmen muss der Kraftvektor  $F_{KMP}$  vom Kraftmessplattenkoordinatensystem ins Laborkoordinatensystem transformiert werden ( $F_{Lab} = [{}^{Lab}R_{KMP}]F_{KMP}$ ). Beides sind orthogonale Koordinatensysteme und der Anstellwinkel  $\beta$  beträgt  $60^\circ$ .

Wie lautet die Rotationsmatrix  $[{}^{Lab}R_{KMP}]$  um den Kraftvektor vom Kraftmessplatten- ins Laborkoordinatensystem zu transformieren?



Extrinsisch

$$[{}^L R_k] = R_{Y_L}(-120^\circ) R_{Z_L}(-90^\circ) = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Intrinsisch

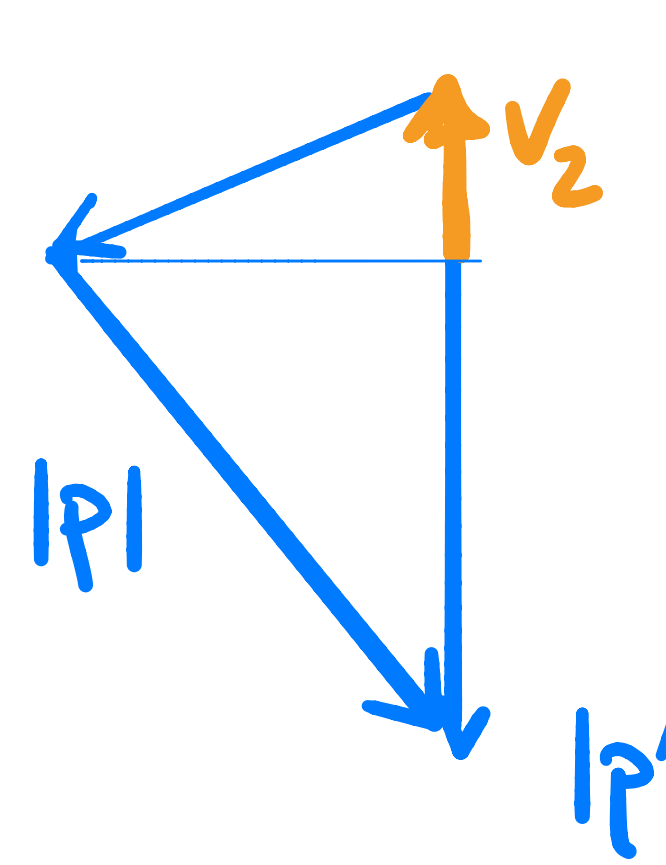
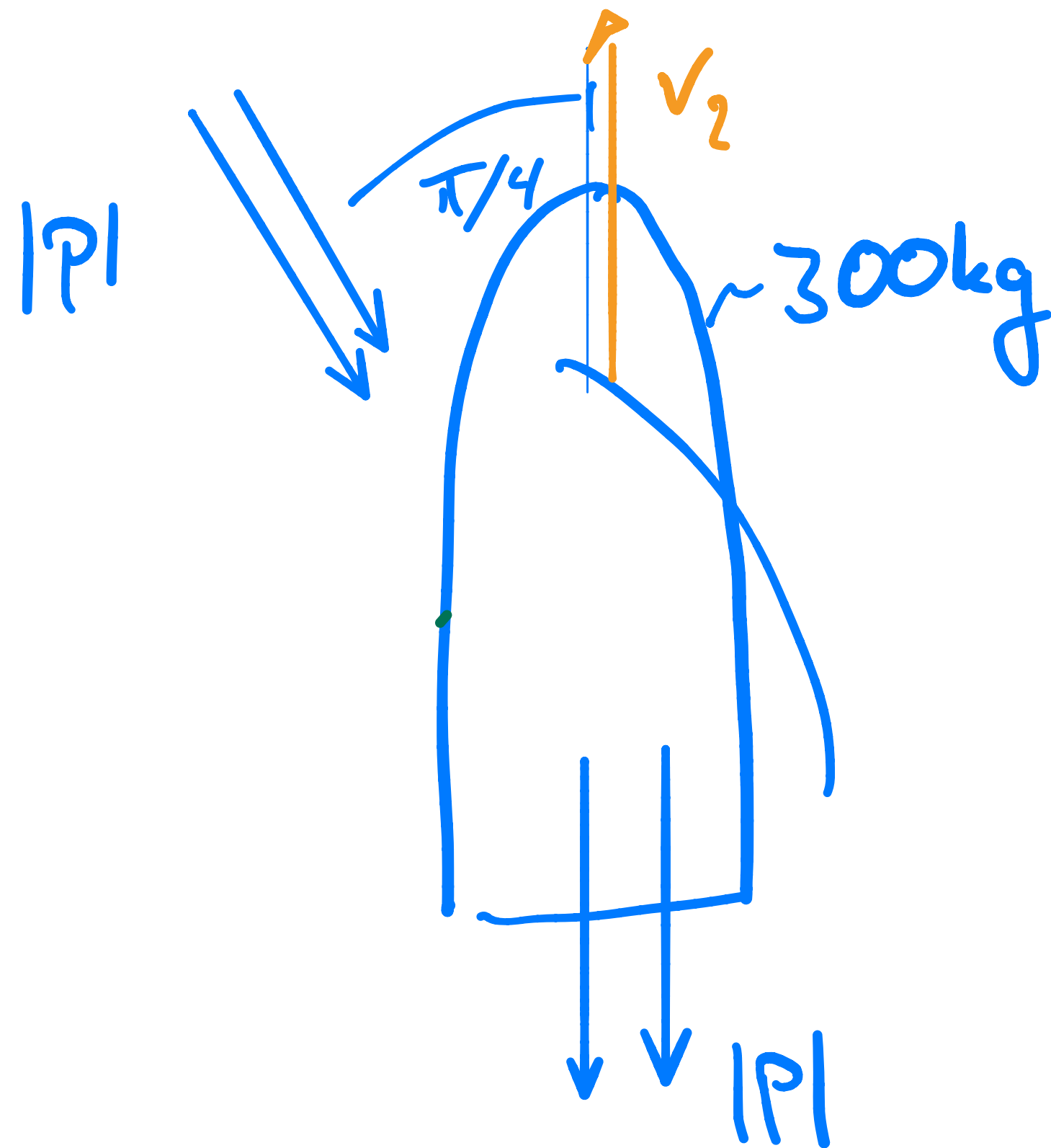
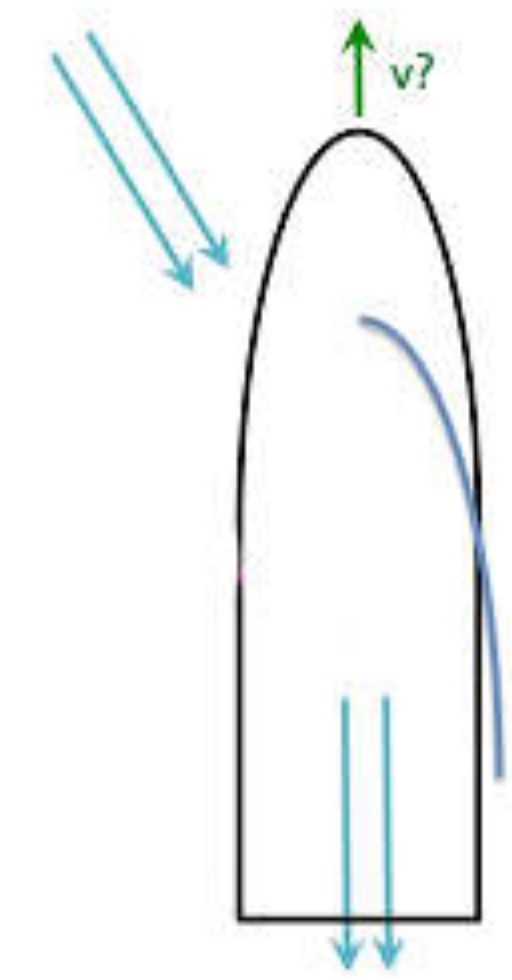
$$[{}^L R_k] = R_{X_k}(-120^\circ) R_{Z'_k}(90^\circ)^T \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}^T$$

Impuls

# Alte Prüfung - Sommer 19: ~~21 Transformation~~

Beim Segeln herrscht Windstille. Plötzlich fällt von vorne ein Windstoss in einem Winkel von  $\alpha = \pi/4$  ein und versetzt das Boot (Gesamtmasse  $m = 300\text{kg}$ ) in Bewegung. Nach Wechselwirkung mit dem Segel strömt die Luft gerade beim Heck hinaus  $\alpha = \pi$ . Wenn der Impuls des Luftstosses vor und hinter dem Schiff  $|p| = 400\text{kg m/s}$  beträgt, berechnen Sie die Endgeschwindigkeit des Bootes in Fahrtrichtung.

Anmerkung: Vernachlässigen Sie alle Effekte des Wassers. Alle Winkel sind bezüglich der Bugrichtung gemessen.



$$m v_2 = (p - p \cos \frac{\pi}{4})$$
$$v_2 = \frac{400}{300} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{\underline{0.3905}}$$